

MC SYLLABUS 1.7a

G. DE LEVE

LEERGANG BESLISKUNDE

DEEL 7a

DYNAMISCHE PROGRAMMERING 1

MATHEMATISCH CENTRUM

AMSTERDAM 1975

AMS(MOS) subject classification scheme (1970): 49C15, 90C40

ISBN 90 6196 033 9

1e druk: 1968

2e druk: 1972

3e druk: 1975

Inhoud

	blz.
Voorwoord	1
1. Inleiding	3
2. De algemene wiskundige formulering	12
3. Het deterministische N-stapsbeslissingsprobleem	16
4. Het stochastische N-stapsbeslissingsprobleem	50
5. Moeilijkheden en mogelijkheden	62
Literatuur	105

Voorwoord

In de delen 7A en 7B wordt een aantal technieken besproken en toegelicht, die men gewoonlijk samenvat onder de naam dynamische programmering. Zij zijn ontwikkeld voor het oplossen van beslissingsproblemen, waarin van de beslisser wordt verwacht dat hij in een tijdsbestek een reeks van beslissingen neemt; beslissingen, die niet onafhankelijk van elkaar beschouwd mogen worden.

In deel 7A worden situaties in beschouwing genomen, waarin slechts een eindig aantal beslissingen genomen mag worden.

In deel 7B wordt daarentegen aandacht besteed aan beslissings-situaties met een onbegrensd aantal beslissingstijdstippen.

De schrijver is bijzonder dankbaar voor de kritiek en de suggesties die hij van de heren Ir.P.J. WEEDA en Drs.H.C. TIJMS mocht ontvangen.

1. Inleiding.

In dit deel zullen wij ons voornamelijk gaan bezighouden met het zg. meer-stapsbeslissingsprobleem. In de syllabus "Inleiding tot de mathematische besliskunde" (zie deel 5; blz.21) hebben wij onderscheid gemaakt tussen één-stapsbeslissingsproblemen en meer-stapsbeslissingsproblemen. Wij stelden dat in een één-stapsbeslissingsprobleem de beslisser slechts één maal behoeft te beslissen. In een meer-stapsbeslissingsprobleem daarentegen wordt van hem verwacht, dat hij in een tijdsbestek een reeks beslissingen neemt. Het één-stapsbeslissingsprobleem werd toegelicht met behulp van het volgende voorbeeld (zie deel 5; blz.6 e.v.):

Voorbeeld 1.1

Een fabrikant wil een veevoeder op de markt brengen, dat verkregen wordt door een groot aantal grondstoffen in een geschikte verhouding te mengen. In tabel 1.1 vindt men behalve de gedeeltelijke samenstelling van de grondstoffen ook hun prijzen vermeld.

Tabel 1.1

Gegevens over beschikbare grondstoffen

%	vocht	verteer- baar ruw eiwit	eiwit	ruw vet	zet- meel	ruwe cel- stof	prijs in guldens /100 kg
rogge	9,5	6,6	7,9	1,2	49,7	1,7	22,75
milocorn	8,5	5,7	7,4	2,3	52,1	2,4	22,35
paardebonen	10,0	15,4	17,5	1,0	46,9	5,6	30,25
sojaschroot	8,1	29,8	33,0	0,6	48,9	4,5	38,25
cocoskoeken	7,1	11,8	14,0	7,0	54,7	11,5	32,50
palmpitschroot	8,1	12,7	13,2	1,8	43,0	18,0	26,50
negerzaadschilfers	7,3	20,2	22,8	3,6	41,7	12,2	32,50

Aan de samenstelling van het veevoeder zijn enkele eisen gesteld. Deze restricties worden aangegeven in tabel 1.2.

Tabel 1.2

Eisen opgelegd aan de samenstelling van het veevoeder

ingrediënten	maximaal %	minimaal %
rogge	20,0	
milocorn	15,0	
paardebonen	7,0	
sojaschroot		5,0
cocoskoeken		2,0
palmpitschroot		8,0
negerzaadschilfers	10,0	
eiwit		14,7
verteerbaar ruw eiwit		12,0
vocht	7,6	
zetmeel		42,0
ruwe vezels	8,4	
vet		2,1

De mengverhouding zal nu zo moeten worden gekozen dat bijv. het totale eiwitgehalte, resulterend uit de diverse bijdragen, minimaal 14,7% is. Op overeenkomstige wijze zullen ook de overige eisen aan de samenstelling van het veevoeder (tabel 1.2) beperkingen opleggen.

Uiteraard zal men trachten het produkt met de hiervóór aangegeven eigenschappen zo goedkoop mogelijk te produceren. De ondernemer wil, rekening houdend met de prijzen der grondstoffen, dié mengverhouding kiezen, waarbij tegen zo laag mogelijke totaalkosten aan grondstoffen een produkt met de vereiste eigenschappen wordt verkregen.

Heeft de ondernemer de gewenste samenstelling eenmaal bepaald, dan is het probleem opgelost. Een één-stapsbeslissingsprobleem dus! Dit zelfde probleem wordt echter een meer-stapsbeslissingsprobleem, wanneer men aan de probleemstelling toevoegt:

"De ondernemer koopt elke vrijdag zoveel grondstoffen in als nodig is voor de produktie in de komende week. Zowel de samenstelling van de grondstoffen als de prijzen wijzigen zich van week tot week".

Uit deze uitbreiding van de probleemstelling volgt dat de ondernemer in een tijdsbestek een reeks van recepten moet ontwerpen. Bijgevolg zoekt hij naar de oplossing van een meer-stapsbeslissingsprobleem. Aangezien hij echter elke vrijdag zoveel grondstoffen inkoopt als nodig is voor één weekproduktie, zullen de opeenvolgende beslissingen elkaar niet beïnvloeden. Het op deze wijze verkregen meer-stapsbeslissingsprobleem is dus eigenlijk niets anders dan een veelvoud van één-stapsbeslissingsproblemen; nl. iedere vrijdag één één-stapsbeslissingsprobleem. Een "echt" meer-stapsbeslissingsprobleem ontstaat pas als de ondernemer bij de inkoop niet alleen kijkt naar de directe behoeften, maar ook de verwachte prijsontwikkeling in zijn beschouwingen betreft. Naast de samenstelling van het veevoeder voor de komende week, dient hij tevens vast te stellen hoeveel om speculatieve redenen moet worden ingekocht. Dit heeft tot gevolg dat toekomstige recepten en inkooppakketten mede bepaald zullen worden door de voorraden, die nu worden aangelegd. Bijgevolg zal de beslisser, als hij tenminste optimaal te werk wil gaan, zijn opeenvolgende beslissingen niet onafhankelijk van elkaar kunnen kiezen. Het is deze afhankelijkheid, die een opdeling in één-stapsbeslissingsproblemen uitsluit. Dit wil nog niet zeggen dat een meer-stapsbeslissingsprobleem van dit type niet op een andere wijze herleid kan worden tot een één-stapsbeslissingsprobleem.

Met behulp van een voorbeeld zullen wij laten zien, dat dit laatste soms wel mogelijk is.

Voorbeeld 1.2

Een chemische industrie heeft een contract afgesloten met één van zijn cliënten. In het contract staat, dat de fabriek zich verplicht tot

- a) levering van d_1 kg. abaraat op 1 februari a.s.,
- " d_2 kg. " " 1 maart a.s.,
- " d_3 kg. " " 1 april a.s.;

- b) levering van het duurdere benesol tegen de voor abaraat geldende prijs als het onder a) toegezegde niet kan worden nagekomen.

Nu geldt dat benesol altijd in voorraad is, terwijl abaraat speciaal voor de cliënt zal moeten worden gefabriceerd. Het produktieniveau van

abaraat kan alleen aan het begin van iedere maand worden veranderd. Elke verandering brengt kosten met zich mee. Voor het geval dat het niveau wordt omgeschakeld van X' naar X'' bedragen de extra kosten

$$(1.1) \quad \alpha_1 (X' - X'')^2,$$

waarbij α_1 een bekende constante is.

Op de afleveringstijdstippen kunnen zich nu de volgende situaties voordoen:

- 1) de vraag naar abaraat is groter dan de aanwezige hoeveelheid. Dit betekent, dat het verschil V tussen de aanwezige en de gevraagde hoeveelheid abaraat negatief is. Als gevolg hiervan moet er dus benesol bijgeleverd worden.
- 2) de vraag naar abaraat is kleiner dan de aanwezige hoeveelheid. Het verschil V tussen de aanwezige en de gevraagde hoeveelheid abaraat zal nu positief zijn. Er blijft dus abaraat over.

Als vraag en aanbod niet gelijk zijn, dan worden er extra kosten gemaakt. In de eerste situatie worden deze extra kosten veroorzaakt door de aflevering van het duurdere benesol, terwijl in de tweede situatie door de beperkte houdbaarheid van abaraat het restant als verloren moet worden beschouwd. Aangenomen wordt nu dat de kosten in beide situaties kunnen worden weergegeven door één kostenfunctie

$$(1.2) \quad \alpha_2 V^2,$$

waarbij α_2 een bekende constante is.

Als V negatief is, geeft $\alpha_2 V^2$ de extra kosten aan in de eerste situatie en als V positief is, geeft (1.2) de kostprijs aan van het overschot aan abaraat.

Gevraagd een produktieprogramma op te stellen, waarvoor de extra kosten minimaal zijn.

Als wij de gevraagde produktieniveaus in de maanden januari, februari en maart respectievelijk aangeven met X_1 , X_2 en X_3 , dan bedragen de extra kosten voor die maanden*)

*) Het produktieniveau op 31 december wordt gelijk aan nul ondersteld.

$$(1.3) \quad \alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 (X_1 - d_1)^2 \quad (\text{januari}),$$

$$(1.4) \quad \alpha_1 (X_2 - X_1)^2 + \alpha_2 (X_2 - d_2)^2 \quad (\text{februari}),$$

$$(1.5) \quad \alpha_1 (X_3 - X_2)^2 + \alpha_2 (X_3 - d_3)^2 \quad (\text{maart}) .$$

Beschouwen wij het meer-stapsbeslissingsprobleem als een veelvoud van één-stapsbeslissingsproblemen, dan luiden deze laatste problemen in hun wiskundige vorm

- 1) "bepaal X_1 zó dat (1.3) minimaal is",
- 2) "bepaal na substitutie van de onder 1) gevonden waarde van X_1 in (1.4), dié X_2 waarvoor (1.4) minimaal is",
- 3) "bepaal na substitutie van de onder 2) gevonden waarde van X_2 in (1.5), dié X_3 waarvoor (1.5) minimaal is".

Het is duidelijk dat de op deze wijze gevonden waarden van X_1 , X_2 en X_3 niet het minimum voortbrengen van de totale kosten

$$(1.6) \quad \alpha_1 X_1^2 + \alpha_2 (X_1 - d_1)^2 + \alpha_1 (X_2 - X_1)^2 + \alpha_2 (X_2 - d_2)^2 + \\ + \alpha_1 (X_3 - X_2)^2 + \alpha_2 (X_3 - d_3)^2 .$$

Dit illustreert dat men in een "echt" meer-stapsbeslissingsprobleem niet optimaal kan beslissen zonder rekening te houden met toekomstige beslissingen. Toch kan het gestelde probleem herleid worden tot een één-stapsbeslissingsprobleem en wel tot het volgende:

"Construeer op 1 januari een produktieschema (X_1 , X_2 , X_3) voor de maanden januari, februari en maart zó dat de totale extra kosten (1.6) minimaal zijn."

Nu zijn de te nemen beslissingen componenten van één meer samengestelde beslissing, welke op het eerste beslissingstijdstip dient te worden bepaald.

In principe kan deze werkwijze gevolgd worden in al die beslissings-situaties, waarvoor geldt dat als de te nemen beslissingen bekend zijn, de toekomstige ontwikkelingen zich met zekerheid laten voorspellen. In een dergelijke situatie verbergt de toekomst zelfs op het eerste beslissingstijdstip geen enkel geheim.

Wij zullen straks in § 3 laten zien dat het ook omgekeerd wel eens zinvol kan zijn om een één-stapsbeslissingsprobleem te herleiden tot een meer-stapsbeslissingsprobleem. Dat een dergelijke vertaling soms mogelijk is, kan men eenvoudig illustreren met behulp van voorbeeld 1.1. Wij behoeven slechts bij de oplossing ervan uit te gaan, dat de ondernemer bij het samenstellen van het mengsel achtereenvolgens (dus niet gelijktijdig!) de benodigde hoeveelheden grondstoffen bepaalt. In verband met de eisen, genoemd in tabel 1.2, mogen deze beslissingen niet onafhankelijk van elkander genomen worden. Het beslissingsprobleem krijgt derhalve het karakter van een meer-stapsbeslissingsprobleem. Aan welke karakterisering men in een concreet geval de voorkeur wil geven, wordt bepaald door de structuur van het desbetreffende beslissingsprobleem. Wij komen hier later nog op terug.

Laten wij thans voor het meer-stapsbeslissingsprobleem nagaan in hoeverre het voor een vertaling in een één-stapsbeslissingsprobleem noodzakelijk is dat de toekomstige ontwikkelingen zich met zekerheid laten voorspellen. Op het eerste gezicht lijkt deze voorwaarde noodzakelijk. Wij weten immers, dat men bij de bepaling van de optimale beslissing rekening moet houden met toekomstige beslissingen. Deze laatste beslissingen zullen afhangen van de omstandigheden, die op de beslissingstijdstippen de situatie kenmerken. Wanneer deze omstandigheden niet van tevoren bekend zijn, kan de beslisser op het eerste beslissings-tijdstip niet alle nog te nemen beslissingen reeds aangeven. Toch zal hij meestal wel in staat zijn om vast te stellen op welke wijze optimale beslissingen tot stand kunnen komen. We zullen dit toelichten aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 1.3

Een groothandelaar in alkaras kan dit artikel iedere maandag-morgen in elke gewenste hoeveelheid inkopen. De inkoopprijs bedraagt

a_1 per kg., terwijl bovendien iedere inkoop een bedrag K aan vaste kosten met zich meebrengt. Indien gedurende de week de aanwezige voorraad niet voldoende blijkt te zijn, dan kunnen noodinkopen worden verricht tegen de hogere prijs a_2 per kg. De kosten van het in voorraad hebben van y kg. alkaras gedurende r weken worden gegeven door $yr C_1$, waarbij C_1 een gegeven constante is. Voor elke week geldt, dat de vraag naar alkaras niet van te voren bekend is, maar een kansverdeling volgt. De groothandelaar vraagt zich elke maandag af, hoeveel hij zal inkopen, opdat in de "long run" zijn kosten minimaal zijn.

Uit een analyse van dit inkoopprobleem blijkt, dat men zich bij het speuren naar optimale beslissingen kan beperken tot beslissingsvoorschriften (strategieën), die door twee parameters s , S ($s \leq S$) en de volgende regels zijn bepaald:

- 1) als de voorraad v op maandagmorgen kleiner is dan s , dan wordt een hoeveelheid $S - v$ ingekocht
- 2) als de voorraad v op maandagmorgen groter is dan s , wordt niets ingekocht.

Wanneer de groothandelaar een dergelijk inkoopvoorschrift volgt, dan zijn de te nemen beslissingen niet van te voren bekend. Zij worden daarentegen wel op het juiste moment door het voorschrift ondubbelzinnig gedicteerd. Wanneer de groothandelaar zich tot inkoopvoorschriften van bovenstaand type beperkt, rest hem nog slechts de waarden s en S te bepalen. Deze parameterwaarden dienen wel op het eerste beslissingstijdstip bekend te zijn. Men kan de keuze van het inkoopvoorschrift natuurlijk zien als een "superbeslissing"; een keuze uit beslissingsvoorschriften! Bijgevolg kan het meer-stapsbeslissingsprobleem herleid worden tot een één-stapsbeslissingsprobleem; weliswaar een beslissingsprobleem van een ander type, maar toch een één-stapsbeslissingsprobleem.

In deel 5 (blz.21) hebben wij vastgesteld, dat de oplossing van een één-stapsbeslissingsprobleem wordt gegeven door een beslissing. Nu gaan alle bekende oplossingstechnieken voor één-stapsbeslissingsproblemen ervan uit, dat een beslissing hoogstens door een eindig aantal getallen

wordt vastgelegd. De oplossing van een meer-stapsbeslissingsprobleem, als meer-stapsprobleem opgelost, heeft de vorm van een strategie. Een strategie is een beslissingsvoorschrift dat op ieder beslissingstijdstip aangeeft welke beslissing genomen moet worden. Het in voorbeeld 1.3 geschetste beslissingsprobleem kan tot een één-stapsbeslissingsprobleem worden herleid, omdat men zich kan beperken tot een speciale klasse van strategieën; een klasse waarvan de leden kunnen worden onderscheiden met behulp van twee parameters. Er bestaan evenwel beslissingsproblemen waarvoor geldt dat het althans op het eerste gezicht niet mogelijk lijkt een klasse van dergelijke strategieën aan te geven. Ter illustratie geven wij het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 1.4

Een automobilist heeft een schadeverzekering afgesloten. In de bijbehorende polis worden o.a. de volgende voorwaarden vermeld:

- 1) De looptijd van de verzekering is één jaar. Aan het eind van ieder jaar kan zij worden verlengd. De premie moet aan het begin van ieder premie-jaar worden voldaan.
- 2) De premie bedraagt f 320,--, tenzij
 - a) in de voorafgaande periode van één jaar geen schade is geclaimd. In dat geval bedraagt de premie f 280,--, tenzij
 - b) in de voorafgaande periode van twee jaar geen schade is geclaimd. In dat geval bedraagt de premie f 240,--, tenzij
 - c) in de voorafgaande periode van drie of meer jaren geen schade is geclaimd. In dat geval bedraagt de premie f 220,--.
- 3) Indien men een schade wil claimen dient dit onmiddellijk te geschieden. Slechts het verschil tussen de schade en een vast bedrag van f 80,--, het zg. eigen risico, wordt door de verzekering uitbetaald.

Gevraagd wordt voor elk tijdstip aan te geven welke schaden geclaimd moeten worden.

Het is duidelijk dat de automobilist nooit een schade van minder dan f 80,-- zal claimen. Het is ook duidelijk, dat hij, als nog geen schade is geclaimd in dat jaar, met het oog op de premie-reducties voor

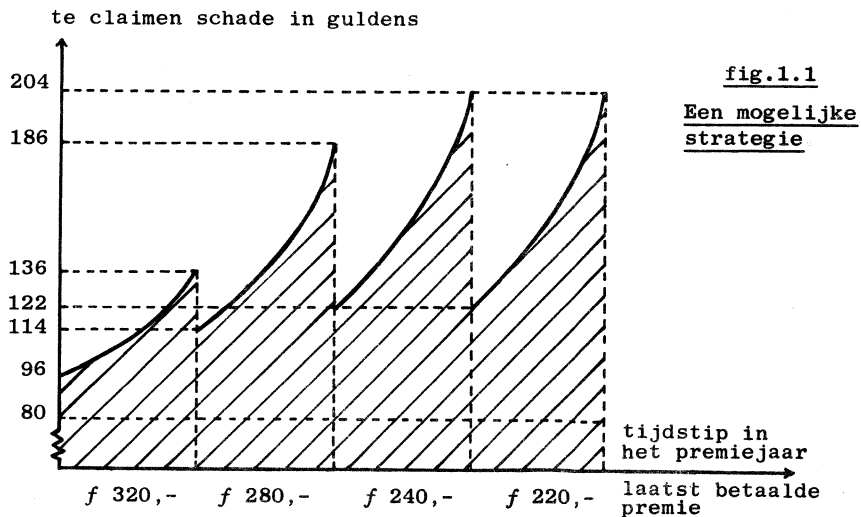
schade-vrij rijden geen schaden zal claimen, welke slechts een weinig hoger zijn dan het eigen risico. De vraag is nu waar precies de grens ligt tussen de schaden die wel en die niet moeten worden geclaimd. Het behoeft geen betoog, dat de grenswaarden zullen afhangen van de laatst betaalde premie en van het tijdstip in het premiejaar.

In figuur 1.1 hebben wij op de verticale as de te claimen schade uitgezet, terwijl op de horizontale as vier tijdvakken zijn aangegeven van elk één premie-jaar. Elk tijdvak correspondeert met een premie en wel met die premie, welke aan het begin van het premie-jaar werd betaald. Op deze wijze is aan ieder premie-jaar een tijdvak toegevoegd. Aangezien de situatie rond een schade getypeerd wordt door de volgende kenmerken:

- 1) de omvang van de schade;
- 2) het tijdstip, waarop de schade plaatsvond;
- 3) de laatst betaalde premie;

en het feit of er al eerder in het premie-jaar een schade is geclaimd, kan, zolang nog geen schade is geclaimd, de situatie op het moment van een schade worden weergegeven door een punt in het zojuist beschreven twee-dimensionaal coördinatensysteem.

In figuur 1.1 is een strategie aangegeven, die voorschrijft dat geen "eerste" schaden worden gemeld, waarvoor geldt, dat het bijbehorende punt in het gearceerde gebied ligt.



De leden van de klasse van alle strategieën van het type, aangegeven in fig.1.1, kunnen niet worden onderscheiden met behulp van een eindig aantal parameters. In een vergevorderd stadium van de oplossing blijkt evenwel, dat de begrenzing van het "optimale" gearceerde gebied bestaat uit stukken van een eenvoudig te bepalen kromme. Bijgevolg kunnen wij ons beperken tot de klasse van dié strategieën, waarvoor geldt, dat de rand van het gearceerde gebied bestaat uit stukken van bovengenoemde kromme. De leden van laatstgenoemde klasse zijn nu wél te onderscheiden met behulp van een eindig aantal parameters. Helaas was deze eigenschap "te laat" bekend. Het is natuurlijk niet uitgesloten, dat men op een andere wijze deze eigenschap wél aan het begin van het oplossingsproces kan ontdekken, waardoor de vertaling in een één-stapsbeslissingsprobleem zinvol wordt. Het autoverzekeringsprobleem kan dus niet als een "veilig" tegenvoorbeeld dienen voor de stelling: "Er bestaan geen meer-stapsbeslissingsproblemen, die niet kunnen worden herleid tot een één-stapsbeslissingsprobleem".

De vraag of er "onvertaalbare" meer-stapsbeslissingsproblemen bestaan, is eigenlijk niet interessant; temeer niet nu blijkt, dat voor sommige wel herleidbare meer-stapsbeslissingsproblemen de "meer-stapsbenadering" de voorkeur verdient.

Indien wij in het hierna komende spreken van een meer-stapsbeslissingsprobleem, dan bedoelen wij een probleem, dat als zodanig wordt opgelost.

Wiskundig gezien is de aanpak van een één-staps- en een meer-stapsbeslissingsprobleem geheel verschillend. De verzameling van technieken, die ontwikkeld zijn voor het oplossen van meer-stapsbeslissingsproblemen, zullen wij hier aangeven met de naam dynamische programmering.

ABRAHAM WALD en RICHARD BELLMAN zijn de grondleggers geweest van de dynamische programmering.

2. De algemene wiskundige formulering.

In deel 5 stelden wij vast, dat meer inzicht in de structuur van het beslissingsprobleem wordt verkregen, indien men overgaat op een neutrale terminologie. Daartoe voerden wij een aantal begrippen in,

zoals: "systeem", "toestand van het systeem", "ontwikkeling in de toestand van het systeem" etc. Deze begrippen bewezen hun dienst bij de vertaling van het oorspronkelijke beslissingsprobleem in het mathematische beslissingsprobleem.

Het object van onze beschouwingen zullen wij ook nu steeds aanduiden met "systeem" (bijv. voorraad, produktie en autoverzekering; zo is in voorbeeld 1.1 het systeem "de produktie van veevoeder").

Het tweede begrip, waarvan wij ons wederom zullen bedienen is "de toestand van het systeem". Immers, zoals uit de voorbeelden blijkt, zal de te nemen beslissing mede afhangen van de toestand, waarin het systeem zich op het moment van beslissen bevindt. Uit de formulering van het beslissingsprobleem kan veelal worden opgemaakt, welke factoren voor het vaststellen van die toestand relevant zijn.

De toestand van het systeem wordt steeds beschreven met behulp van een eindig aantal toestandsvariabelen of, wat hetzelfde is, door een punt S in een eindig-dimensionale Cartesische ruimte $\mathcal{J}$. Deze ruimte wordt ook wel eens de toestandsruimte genoemd. Het is aan te bevelen om in de toestand van het systeem slechts die informatie te verwerken, welke kenmerkend is voor het beschouwde moment. Wij merken op, dat de keuze van de toestandsvariabelen een lastige aangelegenheid kan zijn. Zo zal in voorbeeld 1.4 de toestand van het systeem op ieder beslissings-tijdstip kunnen worden beschreven door de zojuist ontstane schade, het tijdstip in het premie-jaar, de laatst betaalde premie en het feit of er in het premie-jaar reeds een schade was geclaimd of niet. Al deze aspecten zijn kwantitatief van karakter.

In een één-stapsbeslissingsprobleem probeert men met behulp van een beslissing een verbetering aan te brengen in de toestand van het systeem. Men beperkt zich tot die beslissingen, welke kunnen worden beschreven door een eindig aantal beslissingsvariabelen of m.a.w. door een punt X in een eindig-dimensionale Cartesische ruimte $\mathcal{X}$. Deze ruimte wordt ook wel eens beslissingsruimte genoemd. Verder zullen wij steeds uitgaan van de veronderstelling, dat de toelaatbaarheid van een beslissing uitsluitend bepaald wordt door de toestand van het systeem op het moment van beslissen. Vandaar dat de verzameling van toegelaten beslissingen

in $\mathcal{X}$ wordt aangeduid met $\mathcal{X}(S)^*$). De mate, waarin een beslissing X bijdraagt tot de gewenste toestandsverandering, wordt uitgedrukt door de kriteriumfunctie $y(S;X)$.

Het wiskundige één-stapsbeslissingsprobleem luidt: "Bepaal het maximum van de functie $y(S;X)$ onder de bijvoorwaarde $X \in \mathcal{X}(S)$ ". Het behoeft geen betoog, dat zowel de functie $y(S;X)$ als de verzameling $\mathcal{X}(S)$ die eigenschappen moeten bezitten, welke het gestelde probleem oplosbaar maken. Zo is het heel goed denkbaar, dat een probleem van bovenstaande vorm geen oplossing heeft als $\mathcal{X}(S)$ een niet-gesloten verzameling is.

In een meer-stapsbeslissing is men daarentegen niet in een enkele toestand maar veeleer in een gehele ontwikkelingsgang geïnteresseerd. Door zo nu en dan beslissingen te nemen, waaruit toestandsveranderingen resulteren, hoopt de beslisser invloed te kunnen uitoefenen op de ontwikkelingsgang van het systeem. Ook nu wordt de toelaatbaarheid van een beslissing uitsluitend bepaald door de toestand van het systeem op het moment van beslissen.

De ontwikkelingsgang, die zich zal voltrekken wanneer de beslisser zich afzijdig houdt, noemen wij het natuurlijke proces. De ontwikkelingsgang, die echter mede het gevolg is van het beslissen, draagt de naam beslissingsproces.

Wij hebben reeds vastgesteld, dat de oplossing van een meer-stapsbeslissingsprobleem wordt gevormd door een strategie. Van een strategie wordt verwacht, dat het bijbehorende beslissingsvoorschrift op ieder gewenst tijdstip een beslissing dicteert. Deze beslissing zal gebaseerd zijn op de informatie, waarover de beslisser op dat moment beschikt. In het hierna volgende zullen wij steeds uitgaan van de veronderstelling, dat er een optimale strategie bestaat, die voor ieder beslissingstijdstip de benodigde informatie uitgedrukt vindt in de toestand van het systeem. Dit betekent dus, dat in de te beschouwen beslissingssituaties naast de toestand van het systeem informatie over het verleden van het systeem geen bijdrage kan leveren tot een betere keuze van beïnvloedingswijze. Ook zullen wij aannemen, dat onverschillig de beslissingen, die in het verleden zijn genomen, de optimale strategie vanaf ieder beslissingstijdstip het beste antwoord geeft met betrekking tot het resterende

*) Deze notatie heeft dezelfde betekenis als in deel 5 (blz.21 e.v.), waar de verzameling van toegelaten beslissingen werd aangegeven met $\mathcal{X}_S$.

deel van de ontwikkelingsgang. Met andere woorden, op ieder beslissings-tijdstip kan men doen alsof het beslissingsproces juist op dat moment begint. Men moet zich natuurlijk wel realiseren, dat, als het oorspronkelijke beslissingsproces een beperkte levensduur heeft, de te beschouwen processen dan steeds korter worden.

Richard Bellman heeft deze veronderstellingen verwerkt in een "optimaliteitsprincipe". De formulering wint aan duidelijkheid, wanneer men een beslissingsproces in gedachten neemt, dat begint op het eerste van een reeks van gegeven beslissingstijdstippen. Het principe luidt dan als volgt: "Een optimale strategie heeft de eigenschap, dat wat ook de begintoestand is en hoe de eerste beslissing ook luidt, de overige beslissingen een optimale strategie vormen met betrekking tot de (beslissings-)toestand, welke resulteert uit de eerste beslissing".

Deze formulering heeft het bezwaar, dat hierin nogal slordig met het begrip strategie wordt omgesprongen. Een strategie kent aan iedere toestand een beslissing toe en is dus meer dan een reeks van - in speciale toestanden - te nemen beslissingen. Bedoeld wordt, dat de overige beslissingen ook optimaal zijn, wanneer men de periode beschouwt, die begint op het tweede beslissingstijdstip. Deze beslissingen zouden dan gedicteerd kunnen zijn door een optimale strategie, speciaal voor deze kortere periode ontworpen.

Op grond van de gemaakte veronderstellingen kunnen wij ons beperken tot dié strategieën z , welke op ieder beslissingstijdstip aan elke toestand S ondubbelzinnig een beslissing X toevoegen. Wiskundig gezien is een strategie een afbeelding van de toestandsruimte $\mathcal{S}$ in de beslissingsruimte $\mathcal{X}$. Wij schrijven dan ook

$$X = z(S).$$

Uiteraard moet voor elke toegelaten strategie z gelden

$$z(S) \in \mathcal{X}(S); \quad S \in \mathcal{S}.$$

De waardering, die wordt toegekend aan een strategie z zullen wij aangeven met de criteriumfunctie $y(S_0; z)$, waarin S_0 de begintoestand van de ontwikkelingsgang aangeeft. Als $\mathcal{Z}$ de klasse is van de te beschouwen

strategieën, dan luidt het wiskundige meer-stapsbeslissingsprobleem:

"Bepaal diè strategie $z \in \mathcal{Z}$, waarvoor $y(S_0; z)$ maximaal is".

In de hierna volgende paragrafen zullen wij verschillende typen meer-stapsbeslissingsproblemen bestuderen. Steeds wordt stilzwijgend aangenomen, dat het gestelde probleem een oplossing bezit. De existentie van een oplossing wordt zelden aangetoond.

3. Het deterministische N-stapsbeslissingsprobleem.

In een N-stapsbeslissingsproces moet op N van te voren gegeven tijdstippen een beslissing worden genomen. Wij beperken ons tot problemen met de volgende eigenschappen:

- a) Als op het j^{de} beslissingstijdstip de toestand van het systeem gegeven wordt door (j, S_j) dan bestaat er een verzameling van toegelaten beslissingen $\mathcal{X}(j, S_j)^*$. Aangezien op het j^{de} beslissingstijdstip alleen de component S_j van S van belang is, geven wij de verzameling van toegelaten beslissingen voortaan aan met $\mathcal{X}_j(S_j)$.
- b) Als op het j^{de} beslissingstijdstip de toestand van het systeem gegeven wordt door (j, S_j) en als op dat tijdstip een beslissing $X_j \in \mathcal{X}_j(S_j)$ wordt genomen, dan is er een opbrengst van de omvang $h_j(S_j, X_j)$.
- c) Als op het j^{de} beslissingstijdstip de toestand van het systeem gegeven wordt door (j, S_j) en als op dat tijdstip een beslissing $X_j \in \mathcal{X}_j(S_j)$ wordt genomen, dan wordt de toestand van het systeem op het $(j + 1)^{\text{ste}}$ beslissingstijdstip ondubbelzinnig vastgelegd door de transformatie-formule

$$(3.1) \quad S_{j+1} = T_j(S_j, X_j).$$

Aangezien op elk beslissingstijdstip j ($j = 1, \dots, N$) slechts één beslissing genomen moet worden, kunnen wij een strategie z opgebouwd denken uit N beslissingsvoorschriften z_j . Wij schrijven derhalve

*) De index j van het beslissingstijdstip is in de toestand van het systeem opgenomen, omdat deze medebepalend is voor de te nemen beslissing.

$$(3.2) \quad z = (z_1, \dots, z_N)$$

en

$$(3.3) \quad x_j = z(j, s_j) = z_j(s_j).$$

Indien een strategie z wordt gevolgd, dan bedraagt de totale opbrengst

$$(3.4) \quad \sum_{j=1}^N h_j(s_j, z_j(s_j)),$$

waarbij

$$(3.5) \quad s_{j+1} = T_j(s_j, z_j(s_j)).$$

Wij kiezen nu als criteriumfunctie

$$(3.6) \quad y_N(s_1; z) = \sum_{j=1}^N h_j(s_j, z_j(s_j)).$$

Laat $\mathcal{Z}$ de klasse voorstellen van alle mogelijke toegelaten strategieën z van het type (3.2) en laten wij veronderstellen, dat er een strategie $z \in \mathcal{Z}$ bestaat, waarvoor (3.6) maximaal is. Wij zullen dit maximum aangeven met

$$f_N(s_1).$$

Als de eerste beslissing van het N -stapsbeslissingsprobleem is genomen, dan rest op het tweede beslissingstijdstip een volwaardig $(N - 1)$ -stapsbeslissingsprobleem met als criteriumfunctie

$$(3.7) \quad y_{N-1}(s_2; z') = \sum_{j=1}^{N-1} h_{j+1}(s_{j+1}, z_{j+1}(s_{j+1})),$$

waarbij

$$(3.8) \quad z' = (z_2, \dots, z_N).$$

De maximaal te verkrijgen opbrengst bedraagt $f_{N-1}(S_2)$.

Als $\mathcal{Z}'$ de verzameling is van alle mogelijke toegelaten strategieën z' van type (3.8) en als z^* een optimale strategie voorstelt voor het oorspronkelijke N -stapsbeslissingsprobleem, dan volgt uit het optimaliteitsprincipe, dat

$$(3.9) \quad z'^* = (z_2^*, \dots, z_N^*) \in \mathcal{Z}'$$

een optimale strategie is voor het $(N-1)$ -stapsbeslissingsprobleem.

Uit de definitie van $f_N(S_1)$ volgt:

$$(3.10) \quad f_N(S_1) \geq h_1(S_1, X_1) + f_{N-1}(T_1(S_1, X_1)).$$

Verder geldt voor de optimale strategie z^*

$$(3.11) \quad f_N(S_1) = h_1(S_1, z_1^*(S_1)) + f_{N-1}(T_1(S_1, z_1^*(S_1)))$$

en, daar $z_1^*(S_1) \in \mathcal{X}_1(S_1)$,

$$(3.12) \quad \begin{aligned} f_N(S_1) &= h_1(S_1, z_1^*(S_1)) + f_{N-1}(T_1(S_1, z_1^*(S_1))) \leq \\ &\leq \max_{X_1 \in \mathcal{X}_1(S_1)} \{h_1(S_1, X_1) + f_{N-1}(T_1(S_1, X_1))\}. \end{aligned}$$

Uit (3.10) en (3.12) volgt tenslotte:

$$(3.13) \quad f_N(S_1) = \max_{X_1 \in \mathcal{X}_1(S_1)} \{h_1(S_1, X_1) + f_{N-1}(T_1(S_1, X_1))\}.$$

Als reeds k beslissingen zijn genomen, dan rest op het $(k+1)^{\text{ste}}$ beslissingstijdstip een $(N-k)$ -stapsbeslissingsprobleem. Voor dit beslissingsprobleem kunnen wij op analoge wijze de volgende relatie bewijzen:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} f_{N-k}(S_{k+1}) &= \max_{X_{k+1} \in \mathcal{X}_{k+1}(S_{k+1})} \{h_{k+1}(S_{k+1}, X_{k+1}) + \\ &+ f_{N-k-1}(T_{k+1}(S_{k+1}, X_{k+1}))\}. \end{aligned}$$

Nu geldt voor $k = N-1$

$$(3.15) \quad f_1(S_N) = \max_{X_N \in \mathcal{X}_N(S_N)} h_N(S_N, X_N).$$

Als een optimale strategie bestaat voor het N -stapsbeslissingsprobleem, dan geldt, dat voor iedere toestandscomponent S_N minstens één beslissing X_N gevonden kan worden waarvoor $h_N(S_N, X_N)$ maximaal is. Als wij in staat zijn aan iedere toestandscomponent S_N op ondubbelzinnige wijze een "optimaliserende" beslissing X_N toe te voegen dan is een optimaal beslissingsvoorschrift

$$(3.16) \quad X_N = z_N^*(S_N)$$

bepaald.

Uit (3.14) volgt:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} f_2(S_{N-1}) = & \max_{X_{N-1} \in \mathcal{X}_{N-1}(S_{N-1})} \{h_{N-1}(S_{N-1}, X_{N-1}) + \\ & + f_1(T_{N-1}(S_{N-1}, X_{N-1}))\}. \end{aligned}$$

Ook nu geldt, dat, als wij erin slagen een procedure aan te geven, die op een ondubbelzinnige wijze aan iedere toestandscomponent S_{N-1} een "optimaliserende" beslissing X_{N-1} toevoegt, een optimaal beslissingsvoorschrift

$$(3.18) \quad X_{N-1} = z_{N-1}^*(S_{N-1})$$

is bepaald.

Op deze wijze voortgaande vinden wij verder de functies $f_3(S_{N-2}), \dots, f_N(S_1)$ en de componenten $z_{N-2}^*, \dots, z_1^*$ van een optimale strategie z^* .

Wij zullen bovenstaande benadering toelichten met behulp van voorbeeld 1.2 op pagina 5.

Het is duidelijk, dat het in voorbeeld 1.2 geschetste beslissingsprobleem ook geformuleerd kan worden als een 3-stapsbeslissingsprobleem.

Wij gaan als volgt te werk:

- a) Voor de component S_j van de toestand van het systeem op het j^{de} beslissingstijdstip kiezen wij de produktie X_{j-1} van de vorige maand. De transformatieformule (3.1)

$$S_{j+1} = T_j(S_j, X_j)$$

krijgt dan de eenvoudige vorm

$$(3.19) \quad S_{j+1} = X_j.$$

- b) Voor de "opbrengst"-functies kiezen wij (vgl. 1.3 t/m 1.5)

$$(3.20) \quad h_j(S_j, X_j) = \alpha_1 (X_j - S_j)^2 + \alpha_2 (X_j - d_j)^2,$$

waarbij $S_1 = 0$.

- c) Voor de verzameling van toegelaten beslissingen $\mathcal{X}_j(S_j)$ geldt

$$(3.21) \quad \mathcal{X}_j(S_j) = \{ X_j \mid X_j \geq 0 \}.$$

Ter vereenvoudiging van het rekenwerk kiezen wij

$$(3.22) \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 3.$$

Omdat de "opbrengst" bestaat uit kosten, zullen wij niet het maximum maar het minimum van de totale opbrengst bepalen.

Voor de functie $f_1(S_3)$ vinden wij

$$(3.23) \quad f_1(S_3) = \min_{X_3 \geq 0} \{ 2(X_3 - S_3)^2 + 3(X_3 - d_3)^2 \}.$$

Men kan direct nagaan, dat het rechterlid van (3.23) zijn minimum bereikt voor

$$(3.24) \quad x_3 = \frac{2s_3 + 3d_3}{5}.$$

Het minimum bedraagt dus

$$(3.25) \quad \frac{6}{5} (s_3 - d_3)^2.$$

Merk op dat de behoeften d_1 , d_2 en d_3 van te voren bekend zijn; de getallen d_1 , d_2 en d_3 behoeven dus niet in de toestand van het systeem te worden opgenomen.

Bijgevolg vinden wij

$$(3.26) \quad f_1(s_3) = \frac{6}{5} (s_3 - d_3)^2$$

en

$$(3.27) \quad z_3^*(s_3) = \frac{2}{5} s_3 + \frac{3}{5} d_3.$$

De functie $f_2(s_2)$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \min_{x_2 \geq 0} \{ 2(x_2 - s_2)^2 + 3(x_2 - d_2)^2 + f_1(T_2(s_2, x_2)) \} = \\ (3.28) \quad &= \min_{x_2 \geq 0} \{ 2(x_2 - s_2)^2 + 3(x_2 - d_2)^2 + f_1(x_2) \} = \\ &= \min_{x_2 \geq 0} \{ 2(x_2 - s_2)^2 + 3(x_2 - d_2)^2 + \frac{6}{5} (x_2 - d_3)^2 \}. \end{aligned}$$

Het rechterlid van (3.28) bereikt zijn minimum voor

$$(3.29) \quad x_2 = \frac{2s_2 + 3d_2 + 1,2d_3}{6,2}$$

en bedraagt dan

$$(3.30) \quad \frac{4,2S_2^2 + 4,8d_2^2 + 3d_3^2 - 6d_2S_2 - 2,4S_2d_3 - 3,6d_2d_3}{3,1}.$$

Bijgevolg vinden wij

$$(3.31) \quad f_2(S_2) = \frac{4,2S_2^2 + 4,8d_2^2 + 3d_3^2 - 6d_2S_2 - 2,4S_2d_3 - 3,6d_2d_3}{3,1}$$

en

$$(3.32) \quad z_2^*(S_2) = \frac{2S_2 + 3d_2 + 1,2d_3}{6,2}.$$

De functie $f_3(S_1)$ wordt gegeven door (bedenk $S_1 = 0$!)

$$(3.33) \quad \begin{aligned} f_3(S_1) &= \min_{X_1 \geq 0} \{2X_1^2 + 3(X_1 - d_1)^2 + f_2(T_1(S_1, X_1))\} = \\ &= \min_{X_1 \geq 0} \{2X_1^2 + 3(X_1 - d_1)^2 + f_2(X_1)\} = \\ &= \min_{X_1 \geq 0} \{(3.33a)\}, \end{aligned}$$

waarbij

$$(3.33a) = \left\{ 2X_1^2 + 3(X_1 - d_1)^2 + \frac{4,2X_1^2 + 4,8d_2^2 + 3d_3^2 - 6X_1d_2 - 2,4X_1d_3 - 3,6d_2d_3}{3,1} \right\}.$$

Het rechterlid van (3.33) bereikt zijn minimum voor

$$(3.34) \quad X_1 = 0,472d_1 + 0,152d_2 + 0,061d_3$$

en bedraagt dan

$$(3.35) \quad 1,584d_1^2 + 1,401d_2^2 + 0,944d_3^2 - 0,914d_1d_2 - 0,365d_1d_3 - 1,279d_2d_3.$$

Bijgevolg vinden wij

$$(3.36) \quad \begin{aligned} f_3(S_1) &= 1,584d_1^2 + 1,401d_2^2 + 0,944d_3^2 + \\ &- 0,914d_1d_2 - 0,365d_1d_3 - 1,279d_2d_3 \end{aligned}$$

en

$$(3.37) \quad X_1 = z_1^*(0) = 0,472d_1 + 0,152d_2 + 0,061d_3.$$

Wanneer wij nu "terug gaan rekenen" dan vinden wij voor de optimale produktieniveaus

$$(3.38) \quad \begin{cases} X_1 = 0,472d_1 + 0,152d_2 + 0,061d_3, \\ X_2 = 0,152d_1 + 0,533d_2 + 0,213d_3, \\ X_3 = 0,061d_1 + 0,213d_2 + 0,685d_3. \end{cases}$$

De minimale kosten bedragen

$$1,584d_1^2 + 1,401d_2^2 + 0,944d_3^2 - 0,914d_1d_2 - 0,365d_1d_3 - 1,279d_2d_3.$$

Voorbeeld 3.1

De N.V. "De Zeemeeuw" te Katwijk heeft een contract gesloten met de "Verenigde Zwavelfabrieken" (V.Z.F.) te Amsterdam. Dit contract regelt de levering van superzwavelzuur voor de tweede helft van het jaar 1967. De V.Z.F. heeft zich verplicht tot de levering van

100 hl. superzwavelzuur op 1 juli,		
75 hl.	"	" 1 augustus,
90 hl.	"	" 1 september,
60 hl.	"	" 1 oktober,
40 hl.	"	" 1 november,
85 hl.	"	" 1 december.

Superzwavelzuur moet speciaal voor "De Zeemeeuw" worden gemaakt. De produktietijd is voor een opdracht van een dergelijke omvang te verwaarlozen. Wel moeten de kuipen, waarin de produktie plaats vindt, van te voren worden gereinigd. De kosten van een reinigingsbeurt worden geschat op f 500,--. De produktieleider van de V.Z.F. heeft geordonneerd, dat alleen op de laatste dag van de maand gelegenheid wordt geboden voor de produktie van superzwavelzuur. Het bewaren van 1 hl. superzwavelzuur gedurende één maand kost aan rentederving, magazijnhuur etc. een bedrag van f 4,--. De V.Z.F. zoekt naar een zo goedkoop mogelijk produktieschema voor de maanden juni t/m november.

Dit beslissingsprobleem kan worden geformuleerd als een 6-staps-beslissingsprobleem. Wij gaan dan als volgt te werk. De beslissingen moeten worden genomen op 30 juni, 31 juli, 31 augustus, 30 september, 31 oktober en 30 november. De hoeveelheid superzwavelzuur, die we op het j^{de} beslissingstijdstip zullen produceren, geven we aan met X_j . De component S_j van de toestand (j, S_j) van het systeem op het j^{de} beslissingstijdstip wordt gegeven door de restantvoorraad op dat tijdstip. Uit deze definitie van S_j volgt voor de transformatieformule (3.1):

$$(3.39) \quad T_j(S_j, X_j) = S_j + X_j - d_j,$$

waarbij d_j de vraag voorstelt, waaraan aan het begin van de komende maand moet worden voldaan. Het rechterlid van (3.39) geeft ook de voorraad aan in de j^{de} maand. De voorraadkosten bedragen dan voor die maand

$$4 (S_j + X_j - d_j).$$

Als er op de eerste dag van de j^{de} periode superzwavelzuur is geproduceerd ($X_j > 0$), dan bedragen de produktiekosten f 500,--. Voor de opbrengstfunctie kiezen wij nu de som van voorraadkosten en produktiekosten

$$(3.40) \quad h_j(S_j, X_j) = \begin{cases} 4(S_j + X_j - d_j) + 500 & \text{als } X_j > 0, \\ 4(S_j - d_j) & \text{als } X_j = 0. \end{cases}$$

In dit probleem zullen wij de totale kosten minimaliseren. Men kan eenvoudig nagaan dat voor de verzameling van toegelaten beslissingen moet gelden

$$(3.41) \quad \mathcal{X}_j(S_j) = \{X_j \mid \max(d_j - S_j, 0) \leq X_j \leq \sum_{K=j}^6 d_K - S_j\}.$$

Door de relaties (3.39), (3.40) en (3.41) is de wiskundige versie van het 6-stapsbeslissingsprobleem gedefinieerd.

Wij beginnen wederom met de bepaling van de funktie $f_1(S_6)$ en het beslissingsvoorschrift $z_6^*(S_6)$.

Voor $f_1(S_6)$ geldt

$$(3.42) \quad f_1(S_6) = \min_{X_6 \in \mathcal{X}_6(S_6)} \begin{cases} 500 & \text{als } X_6 > 0, S_6 < 85, \\ 0 & \text{als } X_6 = 0, S_6 = 85. \end{cases}$$

Uit (3.41) volgt

$$(3.43) \quad S_6 + X_6 = 85.$$

Bijgevolg

$$(3.44) \quad z_6^*(S_6) = 85 - S_6,$$

en

$$(3.45) \quad f_1(S_6) = \begin{cases} 500 & \text{voor } S_6 < 85, \\ 0 & \text{voor } S_6 = 85. \end{cases}$$

Voor de bepaling van $f_2(S_5)$ onderscheiden wij de volgende gevallen:

$$(3.46) \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } S_5 < 40, \text{ omdat voor } S_5 < 40 \quad X_5 = 0 \text{ niet is toegelaten} \\ \qquad \qquad \qquad (X_5 > 0); \\ \\ \text{a') } S_5 \geq 40, \text{ omdat voor } S_5 \geq 40 \quad X_5 = 0 \text{ wel is toegelaten} \\ \qquad \qquad \qquad (X_5 \geq 0). \\ \\ \text{Aangezien } f_1(S_6) \text{ niet uniform is gedefinieerd, dienen wij in} \\ \text{ieder geval nog een onderscheid te maken tussen de situaties:} \\ \\ \text{b) } 40 \leq S_5 < 125, \text{ omdat voor } X_5 = 0 \quad X_5 + S_5 - 40 (= S_6) < 85 \text{ en} \\ \qquad \qquad \qquad \text{dus } f_1(S_5 + X_5 - 40) = f_1(S_6) = 500 \text{ (zie (3.45));} \\ \\ \text{c) } S_5 = 125, \qquad \text{omdat voor } X_5 = 0 \quad X_5 + S_5 - 40 (= S_6) = 85 \text{ en} \\ \qquad \qquad \qquad \text{dus } f_1(S_5 + X_5 - 40) = f_1(S_6) = 0 \text{ (zie (3.45)).} \end{array} \right.$$

Voor geval a) geldt (zie (3.45))

$$(3.47) \quad f_2(S_5) = \min_{40 - S_5 \leq X_5 \leq 125 - S_5} 4(S_5 + X_5 - 40) + 500 + \begin{cases} 500 \text{ als } S_5 + X_5 - 40 (= S_6) < 85, \\ 0 \text{ als } S_5 + X_5 - 40 (= S_6) = 85. \end{cases}$$

Voor $S_5 + X_5 - 40 < 85$ wordt het minimum bereikt voor $X_5 = 40 - S_5$. Het minimum bedraagt dan 1000. Voor $S_5 + X_5 - 40 = 85$ bedraagt het minimum 840.

Bijgevolg geldt

$$(3.48) \quad \left. \begin{array}{l} f_2(S_5) = 840 \\ z_5^*(S_5) = 125 - S_5 \end{array} \right\} \text{ voor } S_5 < 40.$$

Voor geval b) geldt

$$(3.49) \quad f_2(S_5) = \min_{0 \leq X_5 \leq 125 - S_5} \begin{cases} 4(S_5 - 40) + 500 & \text{voor } X_5 = 0, \\ 4(S_5 + X_5 - 40) + 500 + \begin{cases} 500 \text{ als } S_5 + X_5 < 125 \\ 0 \text{ als } S_5 + X_5 = 125 \end{cases} & \text{voor } X_5 > 0. \end{cases}$$

Uit (3.49) volgt, dat, als $X_5 > 0$ wordt gekozen, $X_5 = 125 - S_5$ de beste keuze is. Het minimum bedraagt dan 840. Kiest men daarentegen $X_5 = 0$, dan vindt men voor $40 \leq S_5 < 125$ een waarde, $4(S_5 - 40) + 500$, kleiner dan 840. Bijgevolg geldt

$$(3.50) \quad \left. \begin{aligned} f_2(S_5) &= 4(S_5 - 40) + 500 = 4S_5 + 340 \\ z_5^*(S_5) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ als } 40 \leq S_5 < 125.$$

Voor geval c) vinden wij op analoge wijze

$$(3.51) \quad \left. \begin{aligned} f_2(S_5) &= 4(S_5 - 40) = 4S_5 - 160 = 340 \\ z_5^*(S_5) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ voor } S_5 = 125.$$

Voor de bepaling van $f_3(S_4)$ onderscheiden wij de volgende gevallen:

$$(3.52) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & S_4 < 60, \\ \text{b)} \quad & 60 \leq S_4 < 100, \\ \text{c)} \quad & 100 \leq S_4 < 185, \\ \text{d)} \quad & S_4 = 185. \end{aligned}$$

Voor geval a) geldt ($X_4 > 0$)

$$(3.53) \quad f_3(S_4) = \min_{60 - S_4 \leq X_4 \leq 185 - S_4} \{ (3.53a) \},$$

waarbij

$$(3.53a) = 4(S_4 + X_4 - 60) + 500 + \begin{cases} 840 & \text{voor } 0 \leq S_4 + X_4 - 60 < 40, \\ 4(S_4 + X_4 - 60) + 340 & \text{voor } 40 \leq S_4 + X_4 - 60 < 125, \\ 340 & \text{voor } S_4 + X_4 - 60 = 125. \end{cases}$$

Uit (3.53a) blijkt, dat in geval a), dus voor $S_4 < 60$, de beste keuze gegeven wordt door $X_4 = 100 - S_4$. Het minimum bedraagt dan 1160.

Bijgevolg

$$(3.54) \quad \left. \begin{aligned} f_3(S_4) &= 1160 \\ z_4^*(S_4) &= 100 - S_4 \end{aligned} \right\} \text{ voor } S_4 < 60.$$

Voor geval b) vinden wij

$$(3.55) \quad f_3(S_4) = \min_{0 \leq X_4 \leq 185 - S_4} \{(3.55a)\},$$

waarbij

$$(3.55a) = \left\{ \begin{aligned} &4(S_4 - 60) + 840 && \text{voor } X_4 = 0, \\ &4(S_4 + X_4 - 60) + 500 + \left\{ \begin{aligned} &840 && \text{als } 60 \leq S_4 + X_4 < 100 \\ &4(S_4 + X_4 - 60) + 340 && \text{als } 100 \leq S_4 + X_4 < 185 \\ &340 && \text{als } S_4 + X_4 = 185 \end{aligned} \right. && \text{voor } X_4 > 0. \end{aligned} \right.$$

Uit (3.55a) volgt dat ingeval $60 \leq S_4 < 100$ de beste keuze gegeven wordt door $X_4 = 0$. Het minimum bedraagt dan $4S_4 + 600$ (voor $S_4 < 100$ is $4S_4 + 600 < 1000!$). Bijgevolg

$$(3.56) \quad \left. \begin{aligned} f_3(S_4) &= 4S_4 + 600 \\ z_4^*(S_4) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ als } 60 \leq S_4 < 100.$$

Voor geval c) geldt

$$(3.57) \quad f_3(S_4) = \min_{0 \leq X_4 \leq 185 - S_4} \{(3.57a)\},$$

waarbij

$$(3.57a) = \begin{cases} 4(S_4 - 60) + 4(S_4 - 60) + 340 & \text{voor } X_4 = 0, \\ 4(S_4 + X_4 - 60) + 500 + \begin{cases} 4(S_4 + X_4 - 60) + 340 & \text{als } 100 \leq S_4 + X_4 < 185 \\ 340 & \text{als } S_4 + X_4 = 185 \end{cases} & \text{voor } X_4 > 0. \end{cases}$$

Uit (3.57a) blijkt, dat voor $100 \leq S_4 < 185$ de keuze $X_4 = 0$ de beste is. Het minimum bedraagt dan $8S_4 - 140$. Bijgevolg

$$(3.58) \quad \left. \begin{aligned} f_3(S_4) &= 8S_4 - 140 \\ z_4^*(S_4) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ als } 100 \leq S_4 < 185.$$

Tenslotte geval d), waarin $S_4 = 185$. Voor $S_4 = 185$ geldt dat $X_4 = 0$. Dus $f_3(S_4)$ en $z_4^*(S_4)$ voldoen aan

$$(3.59) \quad \left. \begin{aligned} f_3(S_4) &= 4(S_4 - 60) + 340 = 840 \\ z_4^*(S_4) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ als } S_4 = 185.$$

Voor de bepaling van $f_4(S_3)$ onderscheiden wij de volgende gevallen:

$$(3.60) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & S_3 < 90, \\ \text{b)} \quad & 90 \leq S_3 < 150, \\ \text{c)} \quad & 150 \leq S_3 < 190, \\ \text{d)} \quad & 190 \leq S_3 < 275, \\ \text{e)} \quad & S_3 = 275. \end{aligned}$$

Voor geval a) geldt

$$(3.61) \quad f_4(S_3) = \min_{90 - S_3 \leq X_3 \leq 275 - S_3} \{ (3.61a) \},$$

waarbij

$$(3.61a) = 4(S_3 + X_3 - 90) + 500 + \begin{cases} 1160 & \text{als } S_3 + X_3 - 90 < 60, \\ 4(S_3 + X_3 - 90) + 600 & \text{als } 60 \leq S_3 + X_3 - 90 < 100, \\ 8(S_3 + X_3 - 90) - 140 & \text{als } 100 \leq S_3 + X_3 - 90 < 185, \\ 840 & \text{als } S_3 + X_3 - 90 = 185. \end{cases}$$

Uit (3.61a) blijkt, dat voor $S_3 < 90$ de beste keuze gegeven wordt door $X_3 = 190 - S_3$. Het minimum bedraagt dan 1560. Bijgevolg geldt

$$(3.62) \quad \left. \begin{aligned} f_4(S_3) &= 1560 \\ z_3^*(S_3) &= 190 - S_3 \end{aligned} \right\} \text{ voor } S_3 < 90.$$

Voor de overige gevallen geldt steeds als beste keuze

$$(3.63) \quad z_3^*(S_3) = 0.$$

Na enig rekenen vinden wij voor de funkties $f_4(S_3)$

$$(3.64) \quad f_4(S_3) = \begin{cases} 1560 & \text{als } S_3 < 90, \\ 4S_3 + 800 & \text{als } 90 \leq S_3 < 150, \\ 8S_3 - 120 & \text{als } 150 \leq S_3 < 190, \\ 12S_3 - 1220 & \text{als } 190 \leq S_3 < 275, \\ 4S_3 + 480 & \text{als } S_3 = 275. \end{cases}$$

Voor de bepaling van $f_5(S_2)$ onderscheiden wij de gevallen

$$(3.65) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & S_2 < 75, \\ \text{b)} \quad & 75 \leq S_2 < 165, \\ \text{c)} \quad & 165 \leq S_2 < 225, \\ \text{d)} \quad & 225 \leq S_2 < 265, \\ \text{e)} \quad & 265 \leq S_2 < 350, \\ \text{f)} \quad & S_2 = 350. \end{aligned}$$

Voor geval a) geldt

$$(3.66) \quad f_5(S_2) = \min_{75-S_2 \leq X_2 \leq 350-S_2} \{ (3.66a) \},$$

waarbij

$$(3.66a) = 4(S_2 + X_2 - 75) + 500 + \begin{cases} 1560 & \text{voor } 0 \leq S_2 + X_2 - 75 < 90, \\ 4(S_2 + X_2 - 75) + 800 & \text{voor } 90 \leq S_2 + X_2 - 75 < 150, \\ 8(S_2 + X_2 - 75) - 120 & \text{voor } 150 \leq S_2 + X_2 - 75 < 190, \\ 12(S_2 + X_2 - 75) - 1220 & \text{voor } 190 \leq S_2 + X_2 - 75 < 275, \\ 4(S_2 + X_2 - 75) + 480 & \text{voor } S_2 + X_2 - 75 = 275. \end{cases}$$

Uit (3.66a) blijkt, dat voor $S_2 < 75$ de beste keuze gegeven wordt door $X_2 = 165 - S_2$. Het minimum bedraagt dan 2020. Voor de overige gevallen geldt steeds als beste keuze

$$(3.67) \quad z_2^*(S_2) = 0.$$

Na enig rekenen vinden wij

$$(3.68) \quad f_5(S_2) = \begin{cases} 2020 & \text{voor } 0 \leq S_2 < 75, \\ 4S_2 + 1260 & \text{voor } 75 \leq S_2 < 165, \\ 8S_2 + 200 & \text{voor } 165 \leq S_2 < 225, \\ 12S_2 - 1020 & \text{voor } 225 \leq S_2 < 265, \\ 16S_2 - 2420 & \text{voor } 265 \leq S_2 < 350, \\ 8S_2 - 120 & \text{voor } S_2 = 350, \end{cases}$$

en

$$(3.69) \quad z_2^*(S_2) = \begin{cases} 165 - S_2 & \text{voor } 0 \leq S_2 < 75, \\ 0 & \text{voor } S_2 \geq 75. \end{cases}$$

Voor de bepaling van $f_6(S_1)$ onderscheiden wij de volgende gevallen:

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } S_1 < 100, \\
 & \text{b) } 100 \leq S_1 < 175, \\
 & \text{c) } 175 \leq S_1 < 265, \\
 (3.70) \quad & \text{d) } 265 \leq S_1 < 325, \\
 & \text{e) } 325 \leq S_1 < 365, \\
 & \text{f) } 365 \leq S_1 < 450, \\
 & \text{g) } S_1 = 450.
 \end{aligned}$$

Voor geval a) geldt

$$(3.71) \quad f_6(S_1) = \min_{100-S_1 \leq X_1 \leq 450-S_1} \{ (3.71a) \},$$

waarbij

$$(3.71a) = 4(S_1 + X_1 - 100) + 500 + \begin{cases} 2020 & \text{voor } 0 \leq S_1 + X_1 - 100 < 75, \\ 4(S_1 + X_1 - 100) + 1260 & \text{voor } 75 \leq S_1 + X_1 - 100 < 165, \\ 8(S_1 + X_1 - 100) + 200 & \text{voor } 165 \leq S_1 + X_1 - 100 < 225, \\ 12(S_1 + X_1 - 100) - 1020 & \text{voor } 225 \leq S_1 + X_1 - 100 < 265, \\ 16(S_1 + X_1 - 100) - 2420 & \text{voor } 265 \leq S_1 + X_1 - 100 < 350, \\ 8(S_1 + X_1 - 100) - 120 & \text{voor } S_1 + X_1 = 350. \end{cases}$$

Uit (3.71a) blijkt, dat voor $S_1 < 100$ de beste keuze gegeven wordt door $X_1 = 175 - S_1$. Het minimum bedraagt dan 2360. Voor de overige gevallen geldt steeds als beste keuze

$$(3.72) \quad z_1^*(S_1) = 0.$$

Bijgevolg vinden wij na enig rekenen

$$(3.73) \quad f_6(S_1) = \begin{cases} 2360 & \text{als } S_1 < 100, \\ 4S_1 + 1620 & \text{als } 100 \leq S_1 < 175, \\ 8S_1 + 460 & \text{als } 175 \leq S_1 < 265, \\ 12S_1 - 1000 & \text{als } 265 \leq S_1 < 325, \\ 16S_1 - 2620 & \text{als } 325 \leq S_1 < 365, \\ 20S_1 - 4420 & \text{als } 365 \leq S_1 < 450, \\ 12S_1 - 1320 & \text{als } S_1 = 450, \end{cases}$$

$$(3.74) \quad z_1^*(S_1) = \begin{cases} 175 - S_1 & \text{voor } S_1 < 100, \\ 0 & \text{voor } S_1 \geq 100. \end{cases}$$

Door de relaties (3.44), (3.48), (3.50), (3.51), (3.54), (3.56), (3.58), (3.59), (3.62), (3.63), (3.69) en (3.74) worden de componenten $z_j^*(S_j)$ van de optimale strategie z^* bepaald. De gevonden resultaten worden in tabel 3.1 nog eens op een overzichtelijke wijze opgesteld.

Tabel 3.1

De optimale strategie

z^*	$z_1^*(S_1)$	$z_2^*(S_2)$	$z_3^*(S_3)$	$z_4^*(S_4)$	$z_5^*(S_5)$	$z_6^*(S_6)$
$S_j <$	100	75	90	60	40	85
$x_j =$	$175 - S_1$	$165 - S_2$	$190 - S_3$	$100 - S_4$	$125 - S_5$	$85 - S_6$
$S_j \geq$	100	75	90	60	40	85
$x_j =$	0	0	0	0	0	0

Wij merken op, dat de optimale strategie gedefinieerd is voor iedere waarde van S_1 . Het is te verwachten, dat de restantvoorraad S_1 op 30 juni gelijk is aan nul. De minimale kosten bedragen dan f 2380,--. De oplossingsmethode maakt van dit gegeven echter geen

gebruik. Dit is kenmerkend voor een dynamische programmeringsaanpak. Door (3.73) wordt aangegeven hoe de minimale kosten afhangen van de begintoestand. Voor $S_1 = 110$ volgt voor de minimale kosten f 2060,--, etc. Deze extra informatie verkrijgen wij niet, wanneer het gestelde probleem wordt opgelost als een één-stapsbeslissingsprobleem. Voor elke beginwaarde S_1 moet het probleem dan opnieuw worden opgelost. De één-stapsversie van het opgeloste probleem luidt als volgt:

Bepaal het minimum van

$$(3.75) \quad y(S_1; X) = \sum_{j=1}^6 4(S_j + X_j - d_j) + 500\delta_j$$

onder de bijvoorwaarden

$$(3.76) \quad \left. \begin{array}{l} S_{j+1} = S_j + X_j - d_j; \\ S_j \geq 0; \\ X_j \geq 0; \\ \delta_j = \begin{cases} 1 & \text{als } X_j > 0; \\ 0 & \text{als } X_j = 0; \end{cases} \end{array} \right\} (j = 1, \dots, 6).$$

In ons tweede en derde voorbeeld zullen wij een beslissingsprobleem beschouwen, dat qua formulering een één-stapsbeslissingsprobleem is, maar dat, herleid tot een meer-stapsbeslissingsprobleem, sneller kan worden opgelost.

Voorbeeld 3.2

De N.V. "De Zeemeeuw" te Katwijk wil haar assortiment in zwavelzuur uitbreiden. Daartoe zal het bedrijf een aantal investeringen moeten doen. Hiervoor komt een viertal objecten in aanmerking. Wij zullen deze objecten aangeven met O_1 , O_2 , O_3 en O_4 . Het in totaal voor de investeringen beschikbare kapitaal bedraagt f 1.000.000,--, te verdelen in acht eenheden van f 125.000,--. In tabel 3.2 vindt men voor de vier objecten, als functie van de investering, de jaarlijkse opbrengst uitgedrukt in rentepercentages.

Tabel 3.2

De winstpercentages

investerings object	1	2	3	4	5	6	7	8
O_1	20	24	22	20	15	14	12	10
O_2	22	25	22	18	16	13	10	9
O_3	25	22	18	14	10	8	6	5
O_4	25	28	20	16	12	9	8	8

De directie van bovengenoemde N.V. zou gaarne willen weten op welke wijze de acht eenheden van f 125.000,-- het best over de vier objecten kunnen worden verdeeld.

Oplossing

Geeft men het aantal eenheden, dat in het j^{de} object moet worden geïnvesteerd aan met X_j , dan zal het bijbehorende winstpercentage worden aangeduid met p_{j,X_j} . De getallen p_{j,X_j} zijn voor $j = 1, 2, 3, 4$ en $X_j = 1, \dots, 8$ te vinden in tabel 3.2. Verder kiezen wij voor $p_{j,0}$ (winstpercentage bij 0 eenheden):

$$(3.77) \quad p_{j,0} = 0 \quad \text{voor} \quad j = 1, \dots, 4.$$

Het gestelde probleem luidt in de één-stapsformulering:
Maximaliseer

$$(3.78) \quad \sum_{j=1}^4 p_{j,X_j} \cdot X_j$$

onder de voorwaarden

$$(3.79) \quad \left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^4 X_j &= 8; \\ X_j &\geq 0; \\ X_j &\text{ geheel}; \end{aligned} \right\} (j=1, \dots, 4).$$

In de meer-stapsversie gaan wij achtereenvolgens geld investeren in de objecten O_1 t/m O_4 . Bijgevolg hebben wij met een 4-stapsbeslissingsprobleem te maken. Om het gestelde probleem te kunnen herformuleren in een 4-stapsbeslissingsprobleem dienen wij eerst de betekenis aan te geven van de toestandsgrootte S_j . De grootte S_j drukt de som van het in O_1 t/m O_{j-1} geïnvesteerde kapitaal uit ($S_1 = 0$).

Uit de definitie van S_j volgt:

a) voor de toestand S_{j+1}

$$(3.80) \quad S_{j+1} = S_j + X_j.$$

b) voor de verzameling $X_j(S_j)$ van toegelaten beslissingen

$$(3.81) \quad X_j(S_j) = \{X_j \mid 0 \leq X_j \leq 8 - S_j\}.$$

Wanneer wij voor de opbrengstfunctie $h_j(S_j, X_j)$ kiezen

$$(3.82) \quad h_j(S_j, X_j) = p_{j, X_j} \cdot X_j,$$

dan is het 4-stapsbeslissingsprobleem rond. Men kan gemakkelijk nagaan, dat de functies $f_k(S_{4-k+1})$ ($k=1, \dots, 4$) gegeven worden door

$$(3.83) \quad f_k(S_{4-k+1}) = \max_{0 \leq X \leq 8 - S_{4-k+1}} \{p_{4-k+1, X} \cdot X + f_{k-1}(S_{4-k+1} + X)\}$$

met

$$(3.84) \quad \begin{cases} f_0(S_4 + X) = 0, \\ f_1(S_4) = \max_{0 \leq X \leq 8 - S_4} p_{4, X} \cdot X. \end{cases}$$

In het geval $S_4 = 0$ kan men voor X de waarden $0, 1, \dots, 8$ kiezen. Met behulp van tabel 3.2 volgt:

$$(3.85) \quad f_1(S_4) = \max\{0 \times 0; 1 \times 25; 2 \times 28; 3 \times 20; 4 \times 16; 5 \times 12; 6 \times 9; 7 \times 8; 8 \times 8\} = 4 \times 16 \text{ of } 8 \times 8.$$

Bijgevolg vinden wij voor $S_4 = 0$

$$(3.86) \quad \begin{cases} z_4^*(S_4) = 4 \text{ of } 8, \\ f_1(S_4) = 64. \end{cases}$$

Evenzo gaat men voor $S_4 = 1, \dots, 8$ na, welke de bijbehorende waarde van X is. Dit geeft de volgende tabel:

Tabel 3.2.1

S_4	$z_4^*(S_4)$	$f_1(S_4)$
0	4; 8	64
1	4	64
2	4	64
3	4	64
4	4	64
5	3	60
6	2	56
7	1	25
8	0	0

Beschouwen wij thans de relatie

$$(3.87) \quad f_2(S_3) = \max_{0 \leq X \leq 8-S_3} \{p_{3,X} \cdot X + f_1(S_3 + X)\}.$$

Eerst bepalen wij $f_2(S_3)$ voor $S_3 = 0$. Als $S_3 = 0$, dan $X \in \{0, 1, \dots, 8\}$. Uit de tabellen 3.2 en 3.2.1 volgt:

Tabel 3.2.2

X	$P_{3,X} \cdot X + f_1(\lambda)$
0	0 + 64
1	25 + 64
2	44 + 64
3	54 + 64
4	56 + 64
5	50 + 60
6	48 + 56
7	42 + 25
8	40 + 0

Dus voor $S_3 = 0$ geldt

$$(3.88) \quad \begin{cases} z_3^*(S_3) = 4, \\ f_2(S_3) = 120. \end{cases}$$

Op analoge wijze behandelt men de gevallen $S_3 = 1, \dots, 8$. Dit geeft na enig rekenwerk:

Tabel 3.2.3

S_3	$z_3^*(S_3)$	$f_2(S_3)$
0	4	120
1	3	118
2	3	114
3	3	110
4	2	100
5	1	81
6	0	56
7	0;1	25
8	0	0

Wij vervolgen met de relatie

$$(3.89) \quad f_3(S_2) = \max_{0 \leq X \leq 8-S_2} \{p_{2,X} \cdot X + f_2(S_2 + X)\}.$$

Met behulp van de tabellen 3.2 en 3.2.3 vindt men na enig rekenwerk:

Tabel 3.2.4

S_2	$z_2^*(S_2)$	$f_3(S_2)$
0	3	176
1	3	166
2	2	150
3	2	131
4	2	106
5	0	81
6	0	56
7	0	25
8	0	0

Tenslotte beschouwen wij de relatie

$$(3.90) \quad f_4(S_1) = \max_{0 \leq X \leq 8-S_1} \{p_{1,X} \cdot X + f_3(S_1 + X)\}.$$

De toestandsgrootte S_1 is gelijk aan nul gesteld. Na enig rekenwerk volgt met behulp van de tabellen 3.2 en 3.2.4

$$(3.91) \quad \begin{cases} f_4(0) = 198, \\ z_1^*(0) = 2. \end{cases}$$

Bijgevolg

$$(3.92) \quad \begin{aligned} S_1 = 0 &\rightarrow \boxed{X_1 = 2} \rightarrow S_2 = S_1 + X_1 = 2 \rightarrow \boxed{X_2 = 2} \rightarrow \\ &\rightarrow S_3 = 4 \rightarrow \boxed{X_3 = 2} \rightarrow S_4 = 6 \rightarrow \boxed{X_4 = 2}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt, dat men de optimale investering verkrijgt door in ieder der vier projecten tweemaal f 125.000,-- te beleggen.

Voorbeeld 3.3

De schipper van de rijnaak Alida V kan voor de vaart van de komende maandag nog 80 ton bergen. Zes bedrijven hebben hem een "onbeperkt" aantal standaardeenheden vracht aangeboden. Deze bedrijven zullen wij in het hierna volgende aanduiden met B_1 t/m B_6 . In tabel 3.3 wordt gegeven

- a) het gewicht w_j , uitgedrukt in tonnen, van de standaardeenheid B_j ,
- b) de winst v_j , te maken op het transport van één standaardeenheid B_j .

Tabel 3.3Gegevens over aangeboden vrachten

bedrijf	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
gewicht	18	28	30	36	38	46
winst	25	40	50	60	65	80

De schipper van de Alida V vraagt zich af, welke eenheden vracht hij zal vervoeren en hoeveel van deze eenheden, opdat zijn winst maximaal is. Bovendien wil hij weten of het probleem opnieuw moet worden opgelost, indien blijkt, dat door een administratieve fout de beschikbare tonnage niet 80 maar 60 ton bedraagt.

Oplossing

Kiezen wij het aantal voor het bedrijf B_j te vervoeren eenheden gelijk aan X_j , dan luidt het één-stapsbeslissingsprobleem:

Maximaliseer

$$(3.93) \quad \sum_{j=1}^6 v_j X_j$$

onder de voorwaarden

$$(3.94) \quad \left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^6 w_j X_j &\leq 80; \\ X_j &\geq 0; \\ X_j &\text{ geheel;} \end{aligned} \right\} (j=1, \dots, 6).$$

Indien wij achtereenvolgens de te vervoeren hoeveelheden X_j ($j=1, \dots, 6$) bepalen, dan ontstaat er een 6-stapsbeslissingsprobleem. De grootte S_j geeft nu de som aan van de voor de bedrijven B_k ($k=1, \dots, j-1$) te vervoeren tonnen vracht. Het is duidelijk, dat wij $S_1 = 0$ stellen. Uit deze definitie volgt:

a) voor de toestand S_{j+1}

$$(3.95) \quad S_{j+1} = S_j + w_j X_j.$$

b) voor de verzameling $\mathcal{X}_j(S_j)$ van toegelaten beslissingen

$$(3.96) \quad \mathcal{X}_j(S_j) = \{X_j \mid 0 \leq X_j \leq \frac{80 - S_j}{w_j}\}.$$

Voor de opbrengstfunctie $h_j(S_j, X_j)$ schrijven wij tenslotte

$$(3.97) \quad h_j(S_j, X_j) = v_j X_j.$$

De functies $f_k(S_{6-k+1})$ voldoen aan

$$(3.98) \quad f_k(S_{7-k}) = \max_{0 \leq X \leq \frac{80 - S_{7-k}}{w_{7-k}}} \{v_{7-k} X + f_{k-1}(S_{7-k} + w_{7-k} X)\}$$

voor $k = 1, \dots, 6$,

waarbij $f_0(S_6 + w_6 X) = 0$.

In principe kan men de waarden van de functies $f_k(S_{6-k+1})$ bepalen voor $S_{6-k+1} = 0, 2, \dots, 80$. Uit tabel 3.3 blijkt nl. dat voor de toestands-

grootheid S_{6-k+1} alleen even getallen in aanmerking komen. Wanneer men het probleem oplost met een rekenmachine, dan zal men zo te werk gaan. Bij het oplossen met de hand zullen wij een andere methode toepassen, waardoor de hoeveelheid rekenwerk aanzienlijk gereduceerd wordt. Wij laten zien, dat men de waarden van de functies $f_k(S_{6-k+1})$ ook kan bepalen voor intervallen. Het is duidelijk, dat wij $f_1(S_6)$ bepalen voor de intervallen H_1 en H_2 , waarbij

$$(3.99) \quad \begin{cases} H_1: 0 \leq S_6 \leq 34, & \text{dan } \chi_6(S_6) = \{0,1\}, \\ H_2: 34 < S_6 \leq 80, & \text{dan } \chi_6(S_6) = \{0\}. \end{cases}$$

Voor S_5 geldt

$$(3.100) \quad \begin{cases} G_1: 0 \leq S_5 \leq 4, & \text{dan } \chi_5(S_5) = \chi(G_1) = \{0,1,2\}, \\ G_2: 4 < S_5 \leq 42, & \text{dan } \chi_5(S_5) = \chi(G_2) = \{0,1\}, \\ G_3: 42 < S_5 \leq 80, & \text{dan } \chi_5(S_5) = \chi(G_3) = \{0\}. \end{cases}$$

Wij zullen nu aangeven hoe wij de intervallen kiezen, waarop wij $f_2(S_5)$ bepalen. Elk der intervallen G_k ($k=1,2,3$) gaan wij verder onderverdelen. Deze onderverdeling is noodzakelijk, omdat $f_1(S_6)$ op H_1 anders gedefinieerd is dan op H_2 . Elk der G_k wordt in disjuncte intervallen $A_1, \dots, A_{n_k}$ gesplitst met

$$(3.101) \quad \bigcup_{i=1}^{n_k} A_i = G_k$$

en wel zodanig, dat voor alle $S_5 \in A_i \subset G_k$ en één vaste $X_5 \in \chi(G_k)$ ($i=1,2,\dots,n_k$; $k=1,2,3$) geldt, hetzij

$$(3.102) \quad \{S_6 \mid S_6 = S_5 + 38X_5\} \subset H_1,$$

hetzij

$$(3.103) \quad \{S_6 \mid S_6 = S_5 + 38X_5\} \subset H_2.$$

Deze eigenschap geldt voor iedere $X_5 \in \mathcal{X}(G_k)$!

De splitsing levert de intervallen op, waarvoor wij straks $f_2(S_5)$ zullen bepalen. In de eerste plaats vinden wij

$$(3.104a) \quad H_3: 0 \leq S_5 \leq 4, \quad \text{dan } \mathcal{X}_5(S_5) = \{0, 1, 2\} .$$

Immers voor $S_5 \in H_3$ geldt

$$(3.105) \quad \{S_6 | S_6 = S_5 + 38X_5\} = \begin{cases} \{S_6 | 0 \leq S_6 \leq 4\} \subset H_1 & \text{als } X_5 = 0, \\ \{S_6 | 38 \leq S_6 \leq 42\} \subset H_2 & \text{als } X_5 = 1, \\ \{S_6 | 76 \leq S_6 \leq 80\} \subset H_2 & \text{als } X_5 = 2. \end{cases}$$

Verder

$$(3.104b) \quad H_4: 4 < S_5 \leq 34, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ dan } \mathcal{X}_5(S_5) = \{0, 1\} ,$$

$$(3.104c) \quad H_5: 34 < S_5 \leq 42,$$

$$(3.104d) \quad H_6: 42 < S_5 \leq 80, \quad \text{dan } \mathcal{X}_5(S_5) = \{0\} .$$

Merk op dat G_1 wordt "gesplitst" in één $A_i (=H_3)$; dus $n_1 = 1$. Het interval G_2 wordt "gesplitst" in twee intervallen $A_i (H_4 \text{ en } H_5)$; dus $n_2 = 2$. Het interval G_3 wordt "gesplitst" in één $A_i (=H_6)$; dus $n_3 = 1$.

Voor S_4 geldt

$$(3.106) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq S_4 \leq 8, & \text{dan } \mathcal{X}_4(S_4) = \{0, 1, 2\} , \\ 8 < S_4 \leq 44, & \text{dan } \mathcal{X}_4(S_4) = \{0, 1\} , \\ 44 < S_4 \leq 80, & \text{dan } \mathcal{X}_4(S_4) = \{0\} . \end{array} \right.$$

Splits deze intervallen analoog als in het voorgaande (dit houdt in, dat tevens de onderverdeling H_3, H_4, H_5, H_6 van 0-80 fijner wordt). Men vindt dan (ga de onderverdeling van $0 \leq S_4 \leq 8$ aandachtig na!)

$$(3.107) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq S_4 \leq 4, \\ 4 < S_4 \leq 6, \\ 6 < S_4 \leq 8, \end{array} \right\} \quad \text{dan } \mathcal{X}_4(S_4) = \{0, 1, 2\} ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 8 < S_4 \leq 34, \\ 34 < S_4 \leq 42, \\ 42 < S_4 \leq 44, \end{array} \right\} \quad \text{dan } \mathcal{X}_4(S_4) = \{0, 1\} ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 44 < S_4 \leq 80, \end{array} \right\} \quad \text{dan } \mathcal{X}_4(S_4) = \{0\} .$$

De intervalsplitsing voor S_3 wordt gelijk aan

$$(3.108) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq S_3 \leq 4, \\ 4 < S_3 \leq 6, \\ 6 < S_3 \leq 8, \\ 8 < S_3 \leq 12, \\ 12 < S_3 \leq 14, \\ 14 < S_3 \leq 20, \end{array} \right\} \quad \text{dan } \mathcal{X}_3(S_3) = \{0, 1, 2\} ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 20 < S_3 \leq 34, \\ 34 < S_3 \leq 42, \\ 42 < S_3 \leq 44, \\ 44 < S_3 \leq 50, \end{array} \right\} \quad \text{dan } \mathcal{X}_3(S_3) = \{0, 1\} ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 50 < S_3 \leq 80, \end{array} \right\} \quad \text{dan } \mathcal{X}_3(S_3) = \{0\} .$$

Voor S_2 wordt de intervalsplitsing

$$(3.109) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq S_2 \leq 4, \\ 4 < S_2 \leq 6, \\ 6 < S_2 \leq 8, \\ 8 < S_2 \leq 12, \\ 12 < S_2 \leq 14, \\ 14 < S_2 \leq 16, \\ 16 < S_2 \leq 20, \\ 20 < S_2 \leq 22, \\ 22 < S_2 \leq 24, \end{array} \right\} \quad \text{dan } \mathcal{X}_2(S_2) = \{0, 1, 2\} ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 24 < S_2 \leq 34, \\ 34 < S_2 \leq 42, \\ 42 < S_2 \leq 44, \\ 44 < S_2 \leq 50, \\ 50 < S_2 \leq 52, \end{array} \right\} \quad \text{dan } \mathcal{X}_2(S_2) = \{0, 1\} ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 52 < S_2 \leq 80, \end{array} \right\} \quad \text{dan } \mathcal{X}_2(S_2) = \{0\} .$$

Voor S_1 geldt

$$(3.110) \quad S_1 = 0, \quad \text{dus } \mathcal{X}_2(S_2) = \{0, 1, 2, 3, 4\} .$$

Wij gaan nu de funkties $f_k(S_{6-k+1})$ en de beslissingsvoorschriften $z_k^*(S_k)$ bepalen.

Allereerst beschouwen wij

$$(3.111) \quad f_1(S_6) = \max_{0 \leq X \leq \frac{80-S_6}{46}} 80 X .$$

Het is duidelijk, dat voor $S_6 \leq 34$ het maximum bereikt wordt voor $X = 1$ ($z_6^*(S_6) = 1$). Voor $S_6 > 34$ is X noodzakelijkerwijs gelijk aan 0 ($z_6^*(S_6) = 0$). Zo vinden wij tabel 3.4.1.

Tabel 3.4.1

S_6	$z_6^*(S_6)$	$f_1(S_6)$
$0 \leq S_6 \leq 34$	1	80
$34 < S_6 \leq 80$	0	0

Wij gaan nu verder met $f_2(S_5)$, die gegeven wordt door

$$(3.112) \quad f_2(S_5) = \max_{0 \leq X \leq \frac{80-S_5}{38}} \{65X + f_1(S_5 + 38X)\}.$$

Na enig rekenwerk vindt men tabel 3.4.2.

Tabel 3.4.2

S_5	$z_5^*(S_5)$	$f_2(S_5)$
$0 \leq S_5 \leq 4$	2	130
$4 < S_5 \leq 34$	0	80
$34 < S_5 \leq 42$	1	65
$42 < S_5 \leq 80$	0	0

Voor de functie $f_3(S_4)$ geldt

$$(3.113) \quad f_3(S_4) = \max_{0 \leq X \leq \frac{80-S_4}{36}} \{60X + f_2(S_4 + 36X)\}.$$

Na enig rekenwerk vindt men tabel 3.4.3.

Tabel 3.4.3

S_4	$z_4^*(S_4)$	$f_3(S_4)$
$0 \leq S_4 \leq 4$	0	130
$4 < S_4 \leq 6$	1	125
$6 < S_4 \leq 8$	2	120
$8 < S_4 \leq 34$	0	80
$34 < S_4 \leq 42$	0	65
$42 < S_4 \leq 44$	1	60
$44 < S_4 \leq 80$	0	0

Vervolgens beschouwen wij

$$(3.114) \quad f_4(S_3) = \max_{0 \leq X \leq \frac{80-S_3}{30}} \{50X + f_3(S_3 + 30X)\}.$$

Na enig rekenwerk vinden wij tabel 3.4.4.

Tabel 3.4.4

S_3	$z_3^*(S_3)$	$f_2(S_3)$
$0 \leq S_3 \leq 4$	0;1	130
$4 < S_3 \leq 6$	0	125
$6 < S_3 \leq 8$	0	120
$8 < S_3 \leq 12$	1	115
$12 < S_3 \leq 14$	1	110
$14 < S_3 \leq 20$	2	100
$20 < S_3 \leq 34$	0	80
$34 < S_3 \leq 42$	0	65
$42 < S_3 \leq 44$	0	60
$44 < S_3 \leq 50$	1	50
$50 < S_3 \leq 80$	0	0

Voor de functie $f_5(s_2)$ geldt

$$(3.115) \quad f_5(s_2) = \max_{0 \leq x \leq \frac{80-s_2}{28}} \{40x + f_4(s_2 + 28x)\}.$$

Na enig rekenwerk vinden wij tabel 3.4.5.

Tabel 3.4.5

s_2	$z_2^*(s_2)$	$f_5(s_2)$
$0 \leq s_2 \leq 4$	0	130
$4 < s_2 \leq 6$	0	125
$6 < s_2 \leq 8$	0	120
$8 < s_2 \leq 12$	0	115
$12 < s_2 \leq 14$	0	110
$14 < s_2 \leq 16$	0;1	100
$16 < s_2 \leq 20$	0	100
$20 < s_2 \leq 22$	1	90
$22 < s_2 \leq 24$	0;2	80
$24 < s_2 \leq 34$	0	80
$34 < s_2 \leq 42$	0	65
$42 < s_2 \leq 44$	0	60
$44 < s_2 \leq 50$	0	50
$50 < s_2 \leq 52$	1	40
$52 < s_2 \leq 80$	0	0

Tenslotte beschouwen wij de functie $f_6(S_1)$

$$(3.116) \quad f_6(S_1) = \max_{0 \leq X_1 \leq \frac{80-S_1}{18}} \{25X_1 + f_5(S_1 + 18X_1)\}.$$

Wij hebben $S_1 = 0$ gesteld; $\mathcal{X}_1(S_1) = \{0, 1, \dots, 4\}$. Na enig rekenwerk vinden wij

$$(3.117) \quad \begin{cases} f_6(0) = 130, \\ z_1^*(0) = 0. \end{cases}$$

Bijgevolg

$$(3.118) \quad \begin{array}{l} \boxed{X_1 = 0} \rightarrow S_2 = 0 \rightarrow \boxed{X_2 = 0} \rightarrow S_3 = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} \boxed{X_3 = 0} \rightarrow S_4 = 0 \rightarrow \boxed{X_4 = 0} \rightarrow S_5 = 0 \rightarrow \boxed{X_5 = 2} \rightarrow S_6 = 76 \rightarrow \boxed{X_6 = 0} \\ \boxed{X_3 = 1} \rightarrow S_4 = 30 \rightarrow \boxed{X_4 = 0} \rightarrow S_5 = 30 \rightarrow \boxed{X_5 = 0} \rightarrow S_6 = 30 \rightarrow \boxed{X_6 = 1} \end{cases} \end{array}$$

Hieruit volgt, dat de schipper de keus heeft uit de volgende optimale oplossingen:

$$(3.118a) \quad \begin{aligned} &(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 2, X_6 = 0) \quad \text{en} \\ &(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 0, X_6 = 1). \end{aligned}$$

In beide gevallen wordt 76 ton van de 80 beschikbare ton in beslag genomen. De optimale winst bedraagt 130.

Als door een administratieve fout blijkt, dat de beschikbare tonnage 60 i.p.v. 80 ton is, dan behoeft het probleem niet in zijn geheel opnieuw te worden opgelost. Men ziet eenvoudig in, dat het voldoende is $S_1 = 20$ te stellen. Als $S_1 = 20$, dan $\mathcal{X}(S_1) = \{0, 1, 2, 3\}$.

Na enig rekenwerk vinden wij

$$(3.119) \quad \begin{cases} f_6(20) = 100, \\ z_1^*(20) = 0. \end{cases}$$

Bijgevolg

$$(3.120) \quad \boxed{X_1 = 0} \rightarrow S_2 = 20 \rightarrow \boxed{X_2 = 0} \rightarrow S_3 = 20 \rightarrow \boxed{X_3 = 2} \rightarrow \\ S_4 = 80 \rightarrow \boxed{X_4 = 0} \rightarrow S_5 = 80 \rightarrow \boxed{X_5 = 0} \rightarrow S_6 = 80 \rightarrow \boxed{X_6 = 0}$$

De optimale oplossing is $(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 2, X_4 = 0, X_5 = 0, X_6 = 0)$ en de winst bedraagt 100.

4. Het stochastische N-stapsbeslissingsprobleem.

In deze paragraaf zullen wij ons bezighouden met het stochastische N-stapsbeslissingsprobleem. Het enige verschil met het deterministische N-stapsbeslissingsprobleem bestaat hierin, dat de component S_{j+1} van de toestand op het $(j+1)^{\text{ste}}$ tijdstip nu niet meer ondubbelzinnig bepaald wordt door de toestandsgrootheid S_j en de beslissing X_j van het voorafgaande tijdstip. In de wiskundige formulering ontbreken derhalve de transformatieformules

$$(4.1) \quad S_{j+1} = T_j(S_j, X_j), \quad (j=1, \dots, N-1).$$

In plaats van (4.1) zal voor het j^{de} beslissingstijdstip een voorwaardelijke kansverdeling van S_{j+1} zijn gegeven; voorwaardelijk met betrekking tot S_j en X_j^*). Zo zal, voor het geval dat S_j en X_j bekend zijn en de toestandsgrootheid S_{j+1} slechts een eindig aantal waarden i ($i=1, \dots, m$) kan doorlopen (discrete toestandruimte), de kansverdeling S_{j+1} gegeven worden door een m -tal getallen $p_j(i|S_j, X_j)$. Bij elk paar waarden van S_j en X_j behoort dus een stelsel van m kansen $p_j(i|S_j, X_j)$. Doorloopt daarentegen de toestandsgrootheid S_{j+1} een interval $a \leq S \leq b$ (continue toestandruimte), dan zal de kansverdeling van S_{j+1} dikwijls door een

*) Grootheden, waaraan een kansverdeling is toegevoegd, worden onderstreept.

kansdichtheid $g_j(S|S_j, X_j)$ worden bepaald. *)

Kortom, in het stochastische N-stapsbeslissingsprobleem beschikt de beslisser over de voorwaardelijke kansverdelingen

$$(4.2) \quad P_j(\mathcal{J}' | S_j, X_j), \quad (j=1, \dots, N-1).$$

$\mathcal{J}'$ stelt in (4.2) een verzameling van toestanden in de toestandsruimte voor. (Voor de hierboven genoemde discrete toestandsruimte behoort bij de verzameling

$$\mathcal{J}' = \{i | i_1 \leq i \leq i_2\}$$

de voorwaardelijke kans

$$(4.3) \quad P_j(\mathcal{J}' | S_j, X_j) = \sum_{i=i_1}^{i_2} p_j(i | S_j, X_j) .$$

Aan de verzameling

$$\mathcal{J}' = \{S | S_1 \leq S \leq S_2\}$$

in de continue toestandsruimte is dikwijls de kans

$$(4.4) \quad P_j(\mathcal{J}' | S_j, X_j) = \int_{S_1}^{S_2} g_j(S | S_j, X_j) dS$$

toegevoegd.)

De notatie (4.2) voorziet in alle gevallen.

Vanwege het niet-deterministische karakter kan bij een stochastisch meer-stapsbeslissingsprobleem niet meer gesproken worden van een maximaal te verkrijgen opbrengst. Immers de totale opbrengst bestaat uit opbrengsten, die mede afhangen van toekomstige en dus op het eerste beslissingstijdstip nog onbekende toestanden van het systeem. Wèl kan men gebruik maken van een nieuw begrip: de maximaal te verwachten op-

*) In een continue toestandsruimte kan de toestandsgrootheid S_j ook een gemengde verdeling bezitten; d.w.z. positieve kansen op bepaalde toestanden en een kansdichtheid voor de overige toestanden.

brengrst. Als in de toestand met $S_{N-k+1} = S^0$ de maximaal te verwachten opbrengst van de laatste k stappen wordt aangegeven met $f_k(S^0)$ en als de toestandsgrrootheid S_{N-k+2} slechts een eindig aantal waarden $i(i=1, \dots, m)$ kan doorlopen met bijbehorende kansen $p_{N-k+1}(i|S^0, X)$, dan voldoet de maximaal te verkrijgen opbrengst $f_k(S^0)$ aan

$$(4.5) \quad f_k(S^0) = \max_{X \in \mathcal{X}_{N-k+1}(S^0)} \left\{ h_{N-k+1}(S^0, X) + \sum_{i=1}^m p_{N-k+1}(i|S^0, X) \cdot f_{k-1}(i) \right\}$$

($k=1, \dots, N$)

met $f_0(i) = 0$ *).

Als de toestandsgrrootheid S_{N-k+2} daarentegen een kansdichtheid $g_{N-k+1}(S|S^0, X)$ bezit en met zekerheid een waarde aanneemt uit het interval $a \leq S \leq b$, dan vinden wij voor $f_k(S^0)$

$$(4.6) \quad f_k(S^0) = \max_{X \in \mathcal{X}_{N-k+1}(S^0)} \left\{ h_{N-k+1}(S^0, X) + \int_a^b g_{N-k+1}(S|S^0, X) f_{k-1}(S) dS \right\}$$

met $f_0(S) = 0$ *).

Kortom, voor een stochastisch N -stapsbeslissingsprobleem geldt voor de maximaal te verwachten opbrengst in de laatste k stappen

$$(4.7) \quad f_k(S^0) = \max_{X \in \mathcal{X}_{N-k+1}(S^0)} \left\{ h_{N-k+1}(S^0, X) + \int f_{k-1}(S) dP_{N-k+1}(S|S^0, X) \right\}$$

met $f_0(S) = 0$ *).

In een andere notatie

$$(4.8) \quad f_k(S^0) = \max_{X \in \mathcal{X}_{N-k+1}(S^0)} \left\{ h_{N-k+1}(S^0, X) + \mathcal{E}\{f_{k-1}(S_{N-k+2})|S^0, X\} \right\}$$

met $f_0(S) = 0$ *).

*) Stilzwijgend wordt steeds verondersteld, dat de rechterleden van (4.5) t/m (4.8) bestaan.

Hierbij staat $\mathcal{E}\{f_{k-1}(S_{N-k+2}) | S^0, X\}$ in (4.8) voor de voorwaardelijke verwachting van de maximaal te verwachten opbrengst in $(k-1)$ stappen; de voorwaarden luiden: $S_{N-k+1} = S^0$ en $X_{N-k+1} = X$.

Ook nu wordt de oplossing van het N -stapsbeslissingsprobleem verkregen door achtereenvolgens de opbrengstfuncties $f_k(S_{N-k+1})$ en de strategiecomponenten $z_{N-k+1}^*(S_{N-k+1})$ ($k=1, \dots, N$) te bepalen. In een tweetal voorbeelden zullen wij de procedure toelichten.

Voorbeeld 4.1

Een reisbureau heeft voor een periode van 6 jaar een hotel gepacht in een wintersportcentrum. Met een plaatselijke kolenhandelaar is een contract afgesloten, waarin wordt bepaald, dat de kolenhandelaar elk jaar een vaste hoeveelheid brandstof zal leveren tegen betaling van een vast bedrag B per jaar. Verder is overeengekomen, dat het reisbureau, in geval van ontevredenheid over de leveranties, aan het eind van elk jaar het contract éézijdig mag opzeggen.

De kolenhandelaar verkoopt drie soorten kolen:

- 1) superkolen,
- 2) kwaliteitskolen,
- 3) huishoudkolen.

Levert de kolenhandelaar gedurende een jaar de kolensoort i dan bedraagt zijn winst a_i ($i=1,2,3$). De kans op opzegging van het contract na levering van de kolensoort i geven wij aan met p_i . Deze kans is onafhankelijk van voorafgaande leveringen en voor ieder jaar gelijk. De kolenhandelaar, een harde zakenman, vraagt zich nu af, welke kolensoorten hij in de komende zes jaar bij het hotel zal afleveren.

In dit voorbeeld zullen wij onder het systeem de kolenleverantie verstaan. Als het contract op het j^{de} beslissingstijdstip is opgezegd, dan zullen wij dit aangeven met $S_j = 0$. Is daarentegen het contract nog geldig, dan schrijven wij $S_j = 1$. De kolenhandelaar moet achtereenvolgens zes maal een beslissing nemen en bijgevolg staat hij voor een 6-stapsbeslissingsprobleem. De beslissingsvariabele X_j kan vier verschillende waarden aannemen:

$$\begin{cases} X_j = 0 & \text{betekent geen levering van kolen,} \\ X_j = i & \text{betekent levering van kolensoort } i. \end{cases}$$

De verzameling van toegelaten beslissingen $\mathcal{X}_j(S_j)$ wordt gegeven door

$$(4.9) \quad \begin{cases} \mathcal{X}_j(0) \equiv \{0\}, \\ \mathcal{X}_j(1) \equiv \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

De opbrengstfunctie $h_j(S_j, X_j)$ heeft de volgende gedaante

$$(4.10) \quad h_j(S_j, X_j) = a_{X_j},$$

waarbij $a_0 = 0$.

De kansen $p_j(i|S_j, X_j)$ worden gegeven door {vgl. (4.3)}

$$(4.11) \quad \begin{cases} p_j(0|S_j, X_j) = p_{X_j}, \\ p_j(1|S_j, X_j) = 1 - p_{X_j}, \end{cases}$$

waarbij $p_0 = 1$.

Voor de maximaal te verwachten opbrengst in de laatste k stappen geldt {vgl. (4.5)}

$$(4.12) \quad \begin{aligned} f_k(S^0) &= \max_{X \in \mathcal{X}_{N-k+1}(S^0)} \left\{ h_{N-k+1}(S^0, X) + \sum_{i=1}^m p_{N-k+1}(i|S^0, X) f_{k-1}(i) \right\} = \\ &= \max_{X \in \mathcal{X}_{N-k+1}(S^0)} \left\{ a_X + (1-p_X) f_{k-1}(1) + p_X f_{k-1}(0) \right\}. \end{aligned}$$

Van bovenstaand resultaat zullen wij nu een toepassing geven.

Stel

$$(4.13) \quad \begin{cases} a_1 = 435, & p_1 = 0,2; \\ a_2 = 790, & p_2 = 0,4; \\ a_3 = 1050, & p_3 = 0,6. \end{cases}$$

Uit (4.12) volgt:

$$\begin{cases} f_1(0) = 0, \\ f_1(1) = \max_{X=(1,2,3)} a_X = 1050, \\ z_6^*(1) = 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2(0) = 0, \\ f_2(1) = \max_{X=(1,2,3)} [a_X + (1-p_X)1050] = 1470, \\ z_5^*(1) = 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3(0) = 0, \\ f_3(1) = \max_{X=(1,2,3)} [a_X + (1-p_X)1470] = 1672, \\ z_4^*(1) = 2, \end{cases}$$

(4.14)

$$\begin{cases} f_4(0) = 0, \\ f_4(1) = \max_{X=(1,2,3)} [a_X + (1-p_X)1672] = 1793,2, \\ z_3^*(1) = 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_5(0) = 0, \\ f_5(1) = \max_{X=(1,2,3)} [a_X + (1-p_X)1793,2] = 1869,56, \\ z_2^*(1) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_6(0) = 0, \\ f_6(1) = \max_{X=(1,2,3)} [a_X + (1-p_X)1869,56] = 1930,65, \\ z_1^*(1) = 1. \end{cases}$$

De maximale verwachting van de winst bedraagt dus 1930,65.

De optimale strategie z^* wordt gegeven door

$$(4.15) \quad \begin{cases} z_1^*(0) = 0, z_2^*(0) = 0, z_3^*(0) = 0, z_4^*(0) = 0, z_5^*(0) = 0, z_6^*(0) = 0, \\ z_1^*(1) = 1, z_2^*(1) = 1, z_3^*(1) = 2, z_4^*(1) = 2, z_5^*(1) = 3, z_6^*(1) = 3. \end{cases}$$

Voorbeeld 4.2

Eén van de servicewagens van de "Eerste Nederlandse Fabriek voor Rekenautomaten N.V.", gevestigd te Groningen, bezoekt wekelijks 5 steden. 's Maandags is de wagen in Amsterdam. Dinsdag vertoeft de reparateur in Den Haag. Woensdag en donderdag behartigt hij de belangen resp. in Rotterdam en Antwerpen. Vrijdag tenslotte is de man in Brussel aan te treffen. De terugreis naar Groningen vindt op zaterdagmorgen plaats. De reparateur kan op zijn rondreis hoogstens 10 reserveonderdelen TX 7004 meenemen. Wanneer hij echter onderweg tekort komt, kan hij het overal verkrijgbare onderdeel U 507A gebruiken; de extra kosten voor ieder exemplaar U 507A bedragen f 100,--. Wanneer de reparateur aan het eind van de dag de resterende voorraad ontoereikend vindt, kan hij de avond benutten om op en neer naar Groningen te gaan voor het aanvullen van zijn voorraad. De bijbehorende kosten hangen af van de stad van waaruit de extra rit wordt ondernomen. De kosten voor stad j bedragen a_j . De kans op een behoefte aan r reserveonderdelen TX 7004 in stad j is $p_r^{(j)}$; de maximale behoefte is b_j .

De reparateur vraagt zich nu voor elke stad af bij welke restantvoorraad een extra rit naar Groningen lonend is.

Op maandag-, dinsdag-, woensdag- en donderdagavond moet de reparateur beslissen of hij naar Groningen zal terugkeren of niet. Het gestelde probleem is dus een 4-stapsbeslissingsprobleem.

De toestand van het systeem op de hierboven genoemde beslissings-tijdstippen wordt bepaald door de restantvoorraad (S_j). Indien tot aanvullen wordt besloten, dan wordt de voorraad aangevuld tot 10 exemplaren; m.a.w. voor $X_j(S_j)$ geldt (X = omvang aanvulling!)

$$(4.16) \quad X_j(S_j) \equiv \{0, 10 - S_j\}.$$

Aangezien in dit probleem slechts kosten een rol spelen, zijn de opbrengsten steeds negatief. In plaats van het maximaliseren van de verwachting van de totale opbrengst, kunnen wij ook de verwachting van de totale kosten minimaliseren. In het hierna volgende geeft $h_j(S_j, X_j)$

de verwachting van de kosten aan, die verbonden zijn aan de j^{de} beslissing.

De uitdrukking $f_k(S)$ stelt nu de minimaal te verwachten kosten voor, op te lopen in de laatste k stappen. De kosten $h_j(S_j, X_j)$ hebben betrekking op de eventuele extra rit naar Groningen vanuit stad j en de te maken noodinkoopkosten in stad $(j+1)$. Wij vinden derhalve voor $h_j(S_j, X_j)$

$$(4.17) \quad h_j(S_j, X_j) = \begin{cases} 100 \sum_{r=S_j+1}^{b_{j+1}} (r-S_j) p_r^{(j+1)} & \text{als } X_j=0, \\ a_j + 100 \sum_{r=11}^{b_{j+1}} (r-10) p_r^{(j+1)} & \text{als } X_j=10-S_j \\ & \text{en } X_j > 0. \end{cases}$$

De voorwaardelijke kansverdelingen $p_j(i | S_j, X_j)$ worden gegeven door de getallen $p_j(i | S_j, X_j)$ [vgl. (4.3)]

$$(4.18) \quad p_j(i | S_j, X_j) = \begin{cases} p_{S_j+X_j-i}^{(j+1)} & \text{voor } i > 0, \\ \sum_{r=S_j+X_j}^b p_r^{(j+1)} & \text{voor } i = 0. \end{cases}$$

Voor de funktie $f_k(S)$ vinden wij tenslotte [vgl. (4.5)]

$$(4.19) \quad f_k(S) = \min_{X=(0, 10-S)} \left\{ a_X^{(k)} + 100 \sum_{r=S+X+1}^{b_{4-k+2}} (r-S-X) p_r^{(4-k+2)} + \right. \\ \left. + \sum_{r=0}^{S+X} p_r^{(4-k+2)} f_{k-1}(S+X-r) + \sum_{r=S+X+1}^{b_{4-k+2}} p_r^{(4-k+2)} f_{k-1}(0) \right\},$$

waarbij

$$(4.20) \quad a_X^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{als } X=0, \\ a_{4-k+1} & \text{als } X > 0. \end{cases}$$

Wij zullen nu een numerieke toepassing geven.

De waarden van de getallen a_j zijn

$$\begin{cases} a_1 = 125, \\ a_2 = 150, \\ a_3 = 150, \\ a_4 = 250. \end{cases}$$

De kansen $p_r^{(j)}$ geven wij in tabel 4.1.

Tabel 4.1

r	$p_r^{(1)}$ A'dam	$p_r^{(2)}$ Den Haag	$p_r^{(3)}$ R'dam	$p_r^{(4)}$ Antwerpen	$p_r^{(5)}$ Brussel
0	0,05	0,02	0,01	0,15	0,01
1	0,15	0,10	0,01	0,30	0,01
2	0,20	0,15	0,01	0,25	0,01
3	0,25	0,20	0,03	0,15	0,03
4	0,20	0,20	0,06	0,10	0,06
5	0,10	0,15	0,10	0,05	0,10
6	0,05	0,10	0,15	--	0,15
7	--	0,08	0,15	--	0,15
8	--	--	0,15	--	0,15
9	--	--	0,10	--	0,10
10	--	--	0,10	--	0,10
11	--	--	0,08	--	0,08
12	--	--	0,05	--	0,05

Wij gaan nu de optimale strategie berekenen.

$$(4.21) \quad f_1(S_4) = \min_{X_4 = (0, 10 - S_4)} \left\{ a_{X_4}^{(1)} + 100 \sum_{r=S_4+X_4+1}^{12} (r - S_4 - X_4) p_r^{(5)} \right\}.$$

Geval $S_4 = 0$:

Als $X_4 = 0$, dan geldt

$$f_1(S_4) = a_{X_4}^{(1)} + 100 \sum_{r=S_4+X_4+1}^{12} (r-S_4-X_4) p_r^{(5)} = 0 + 100 \sum_{r=1}^{12} r p_r^{(5)} =$$

$$= 100.7,39 = 739.$$

Als $X_4 = 10$, dan geldt

$$f_1(S_4) = a_{X_4}^{(1)} + 100 \sum_{r=S_4+X_4+1}^{12} (r-S_4-X_4) p_r^{(5)} =$$

$$= 250 + 100 \sum_{r=11}^{12} (r-10) p_r^{(5)} = 250 + 100.0,18 = 268.$$

Bijgevolg

$$(4.22) \quad \begin{cases} f_1(0) = 268, \\ z_4^*(0) = 10. \end{cases}$$

Na enig rekenwerk vindt men:

Tabel 4.2

S_4	$f_1(S_4)$	$z_4^*(S_4)$
0	268	10
1	268	9
2	268	8
3	268	7
4	268	6
5	263	0
6	185	0
7	122	0
8	74	0
9	41	0
10	18	0

Vervolgens beschouwen wij de relatie

$$(4.23) \quad f_2(S_3) = \min_{X=(0,10-S_3)} \left\{ a_X^{(2)} + 100 \sum_{r=S_3+X+1}^5 (r-S_3-X) p_r^{(4)} + \right. \\ \left. + 3 \sum_{r=0}^{S_3+X} p_r^{(4)} f_1(S_3+X-r) + \sum_{r=S_3+X+1}^5 p_r^{(4)} f_1(0) \right\}.$$

Geval $S_3 = 0$:

Als $X = 0$, dan wordt de uitdrukking binnen de accolades in (4.23) gelijk aan

$$0 + 100 \sum_{r=1}^5 r p_r^{(4)} + \sum_{r=0}^5 p_r^{(4)} f_1(0) = 0 + 130 + 268 = 458.$$

Als $X = 10$, dan geldt voor de zelfde uitdrukking

$$150 + \sum_{r=0}^5 p_r^{(4)} f_1(10-r) = 150 + 83,45 = 233,45.$$

Na enig rekenwerk vindt men:

Tabel 4.3

S_3	$f_2(S_3)$	$z_3^*(S_3)$
0	233,45	10
1	233,45	9
2	233,45	8
3	233,45	7
4	233,45	6
5	233,45	5
6	233,45	4
7	219,95	0
8	173,60	0
9	126,30	0
10	83,45	0

Voor de functie $f_3(S_2)$ geldt

$$(4.24) \quad f_3(S_2) = \min_{X=(0, 10-S_2)} \left\{ a_X^{(3)} + 100 \sum_{r=S_2+X+1}^{12} (r-S_2-X) p_r^{(3)} + \right. \\ \left. + \sum_{r=0}^{S_2+X} p_r^{(3)} f_2(S_2+X-r) + \sum_{r=S_2+X+1}^{12} p_r^{(3)} f_2(0) \right\}$$

Geval $S_2 = 0$:

Als $X = 0$, dan wordt de uitdrukking binnen de accolades in (4.24) gelijk aan

$$0 + 100 \sum_{r=1}^{12} r p_r^{(3)} + \sum_{r=0}^{12} p_r^{(3)} f_2(0) = 739 + 233,45 = 972,45.$$

Als $X = 10$, dan geldt voor de zelfde uitdrukking

$$150 + 100 \sum_{r=11}^{12} (r-10) p_r^{(3)} + \sum_{r=0}^{10} p_r^{(3)} f_2(10-r) + \sum_{r=11}^{12} p_r^{(3)} f_2(0) = \\ = 150 + 18 + 229,88 = 397,88.$$

Na enig rekenwerk vindt men

Tabel 4.4

S_2	$f_3(S_2)$	$z_2^*(S_2)$
0	397,88	10
1	397,88	9
2	397,88	8
3	397,88	7
4	397,88	6
5	397,88	5
6	397,88	4
7	355,32	0
8	306,72	0
9	272,65	0
10	247,88	0

Tenslotte vindt men na enig rekenwerk

Tabel 4.5

S_1	$f_4(S_1)$	$z_1^*(S_1)$
0	485,17	10
1	485,17	9
2	485,17	8
3	485,17	7
4	456,15	0
5	423,88	0
6	405,88	0
7	397,03	0
8	391,80	0
9	379,88	0
10	360,17	0

De strategie, die de reparateur zal volgen, wordt gegeven door de tabellen (4.2) t/m (4.5).

Het minimum van de verwachte kosten bedraagt

$$\sum_{r=0}^{10} p_r^{(1)} f_4(10-r) + 100 \sum_{r=11}^{b1} (r-10) p_r^{(1)} = \sum_{r=0}^6 p_r^{(1)} f_4(10-r) = 398,98.$$

5. Moeilijkheden en mogelijkheden.

De oplossing van het N-stapsbeslissingsprobleem bestaat uit een N-voudige herhaling van een tweetal operaties *):

I. Bepaal voor iedere waarde van S een $X \in \mathcal{X}_{N-k+1}(S)$ zodat

$$(5.1) \quad h_{N-k+1}(S, X) + f_{k-1}(T_{N-k+1}(S, X))$$

(deterministisch N-stapsbeslissingsprobleem)

*) Ter vereenvoudiging van de notatie laten wij in deze paragraaf de index van S_j weg en schrijven dus kortweg S.

of

$$(5.2) \quad h_{N-k+1}(S, X) + \int_{J^{(N-k+2)}} f_{k-1}(s) dP_{N-k+1}(s | S, X)$$

(stochastisch N-stapsbeslissingsprobleem)

maximaal is. *)

II. Bepaal de wiskundige relatie tussen de toestand S en de onder I gevonden beslissing X. Deze relatie is dan de gezochte strategie-component $z_{N-k+1}^*(S)$. Bepaal vervolgens de functie $f_k(S)$ door substitutie van $X = z_{N-k+1}^*(S)$ in (5.1) of (5.2).

De eerste operatie is in principe uitvoerbaar als de toestandruimte $J^{(N-k+1)}$ bestaat uit een eindig aantal punten (discrete toestandruimte; vgl. de voorbeelden). De eerste operatie is eveneens in principe uitvoerbaar als de toestandruimte $J^{(N-k+1)}$ zich laat opdelen in een eindig aantal deelverzamelingen (gebieden) waarvoor - voor ieder afzonderlijk - geldt dat de strategiecomponent $z_{N-k+1}^*(S)$ bepaald kan worden zonder nadere specificatie van S (vgl. de voorbeelden).

In beide gevallen moet men een eindig aantal berekeningen uitvoeren. Als de toestandruimte $J^{(N-k+1)}$ bestaat uit meer dan eindig veel punten en als bovendien een opdeling van deze ruimte, zoals hierboven bedoeld, niet mogelijk is, dan bestaat de eerste operatie uit meer dan eindig veel handelingen en is dus niet uitvoerbaar.

In de tweede operatie zal men, als $J^{(N-k+1)}$ bestaat uit een eindig aantal punten, veelal zowel $z_{N-k+1}^*(S)$ als $f_k(S)$ voor ieder van die punten afzonderlijk specificeren. Bestaat daarentegen de toestandruimte $J^{(N-k+1)}$ uit meer dan eindig veel punten en is de meermalen genoemde opsplitsing mogelijk, dan ligt het voor de hand om te proberen de functies $z_{N-k+1}^*(S)$ en $f_k(S)$ op ieder van die deelverzamelingen afzonderlijk te definiëren. De eis echter, dat voor ieder van deze deelverzamelingen het funktieverband moet worden vastgelegd en zodanig moet worden opgeborgen, dat het in de eerstvolgende serie operaties oproepbaar is (zie

*) De toestandruimte $J^{(N-k+i)}$ wordt beschreven door S_{N-k+i} .

(5.1) met k in plaats van $k-1$), vormt een belemmering voor de toepasbaarheid van deze benaderingswijze. In de praktijk blijkt namelijk, dat voor hoge waarden van k het aantal benodigde deelverzamelingen snel stijgt. Zodra de capaciteit van de rekenautomaat te klein is om voor een of andere waarde van $k \leq N$ de gedaante van een functie $f_k(S)$ op een analytische wijze vast te leggen, faalt de procedure. Het is duidelijk dat dit gevaar groter wordt naarmate de dimensie van de toestandsruimte $\mathcal{J}^{(N-k+1)}$ toeneemt.

In het resterende deel van deze paragraaf zullen wij zoeken naar mogelijke oplossingen van de hierboven geschetste moeilijkheden. Het behoeft geen betoog dat de gerezen moeilijkheden wellicht snel kunnen worden opgelost, als wij de toestandsruimte $\mathcal{J}^{(N-k+1)}$ met meer dan eindig veel punten mogen inruilen voor één met eindig veel. In eerste instantie zullen wij derhalve in deze richting naar een oplossing zoeken.

Stel om de gedachten te bepalen, dat de toestandsruimte $\mathcal{J}^{(N-k+2)}$ een begreënsd gebied is in een 2-dimensionale Cartesische ruimte. Stel vervolgens dat in deze 2-dimensionale ruimte een 2-dimensionaal rooster is gegeven. Ieder roosterpunt i kan beschouwd worden als een centrum van een halfgesloten rechthoek O_i (zie fig. 5.1). De rechthoeken zijn disjunct en overlappen de toestandsruimte $\mathcal{J}^{(N-k+2)}$. Binnen $\mathcal{J}^{(N-k+2)}$ ligt slechts een eindig aantal punten i ($i = 1, \dots, M_{N-k+2}$).

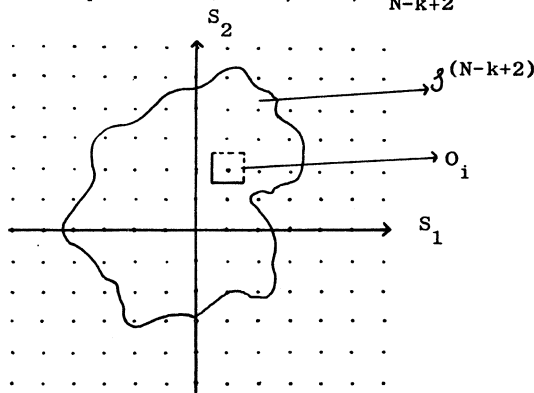


fig. 5.1

Roosterpunten in een $\mathcal{J}^{(N-k+2)}$

In onze eerste poging een oplossing te vinden voor de moeilijkheden gaan wij het gestelde N-stapsbeslissingsprobleem vervangen door een ander. De toestandsruimte $\mathcal{J}^{(j)}$ van het gewijzigde probleem bestaat slechts uit roosterpunten van de toestandsruimte van het oorspronkelijke probleem (discretisering!). Om het nieuwe probleem rond te krijgen, dienen wij nog aan te geven hoe de bijbehorende transformatie $T_j(S, X)$ of de bijbehorende kans $P_j(O' | S, X)$ gedefinieerd is.

Met iedere transformatie $T_j(S, X)$ van het oorspronkelijke probleem correspondeert een transformatie $\check{T}_j(S, X)$ van het nieuwe probleem, die gegeven wordt door

$$(5.3) \quad \check{T}_j(S, X) = i \quad \text{als} \quad T_j(S, X) \in O_i.$$

Aan iedere kansverdeling $P_j(O' | S, X)$ van het oorspronkelijke probleem zijn de kansen $\check{P}_j(i | S, X)$ van het nieuwe probleem toegevoegd, en wel zodanig dat (vgl. (4.3))

$$(5.4) \quad P_j(O_i | S, X) = \check{P}_j(i | S, X) \quad \text{met } i = 1, \dots, M_j.$$

Voor de roosterpunten S blijven de verzamelingen van toegelaten beslissingen $\mathcal{X}_j(S)$ ongewijzigd. In plaats van de operaties I en II beschouwen wij de volgende *):

I^a. Bepaal voor ieder roosterpunt S in $\mathcal{J}^{(N-k+1)}$ een $X \in \mathcal{X}_{N-k+1}(S)$ zodanig dat

$$(5.5) \quad h_{N-k+1}(S, X) + \check{f}_{k-1}(\check{T}_{N-k+1}(S, X))$$

(deterministisch N-stapsbeslissingsprobleem)

of

*) Een alternatieve aanpak is toch de operaties I en II uit te voeren, maar nu alleen voor de punten van het rooster. Evenals de functie $f_{k-1}(S)$ wordt de functie $f_k(S)$ voor de gehele ruimte $\mathcal{J}^{(N-k+1)}$ "verkregen" door middel van interpolaties tussen de gevonden roosterwaarden.

$$(5.6) \quad h_{N-k+1}(S, X) + \sum_{i=1}^{M_{N-k+2}} p_{N-k+1}(i | S, X) f_{k-1}(i)$$

(stochastisch N-stapsbeslissingsprobleem)

maximaal is.

II^a. Bepaal de wiskundige relatie tussen de toestand (roosterpunt S) en de onder I^a gevonden beslissing X. Deze relatie is de strategiecomponent $\check{z}_{N-k+1}^*(S)$. Bepaal de functie $\check{f}_k(S)$ door substitutie van $X = \check{z}_{N-k+1}^*(S)$ in (5.5) of (5.6).

Toestandsruimten $\mathcal{J}^{(j)}$ met een hogere dimensie dan twee kunnen op een analoge wijze worden gediscretiseerd. Wij beschouwen dan roosters van hogere dimensie.

Nu rijzen de volgende vragen: "Kan met behulp van de functie $\check{f}_k(S)$ een goede benadering voor $f_k(S)$ gevonden worden?" en "Zo ja, wordt voor iedere S de afwijking van $f_k(S)$ onbeperkt klein naarmate het rooster fijner wordt gekozen?" Tenslotte willen we gaarne weten of bij een fijne roosterverdeling grote fouten worden gemaakt als voor een (niet-roosterpunt) S de beslissing X wordt bepaald door middel van interpolatie van $\check{z}_{N-k+1}^*(S)$.

In fig. 5.2 wordt geïllustreerd dat voor een één-dimensionale $\mathcal{J}^{(N-k+1)}$ interpolatie tot slechte resultaten kan leiden. De dik getrokken lijn stelt $X = z_{N-k+1}^*(S)$ voor, terwijl de stippellijn voor iedere S de beslissing X aanwijst, waarvoor (5.1) minimaal is. Stel dat voor de equidistante punten i (zie fig. 5.2) geldt

$$(5.7) \quad \check{z}_{N-k+1}^*(i) \approx z_{N-k+1}^*(i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Wanneer nu $z_{N-k+1}^*(2\frac{1}{2})$ wordt geschat door

$$(5.8) \quad \frac{1}{2}\check{z}_{N-k+1}^*(2) + \frac{1}{2}\check{z}_{N-k+1}^*(3),$$

dan wordt juist het minimum gevonden in plaats van het maximum.

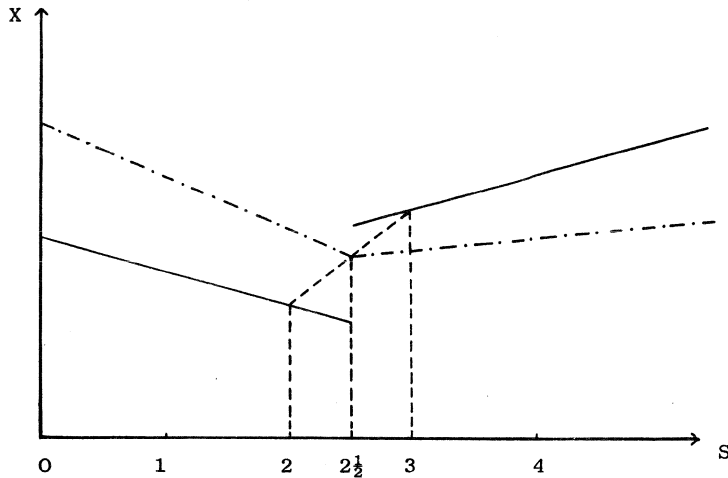


fig. 5.2

Een niet geslaagde interpolatie

Uit dit voorbeeld volgt dat het gebruik van een rooster voor de bepaling van de functies $f_{N-k+1}(S)$ en $z_k^*(S)$ slechts dan gerechtvaardigd is, als men weet dat de desbetreffende functie continu is. Het is niet mogelijk, om zonder nadere specificatie van het N -stapsbeslisingsprobleem aan te geven, wanneer dit het geval zal zijn. Wij zullen voor een speciale groep van N -stapsbeslisingsproblemen voldoende voorwaarden opstellen voor de continuïteit van $f_{N-k+1}(S)$ en $z_k^*(S)$. Wij beschouwen daartoe het volgende probleem:

Bepaal het maximum van

$$(5.9) \quad \sum_{j=1}^N g_j(X_j)$$

onder de voorwaarden

$$(5.10) \quad \sum_{j=1}^N a_j X_j \leq b \text{ en } X_j \geq 0,$$

waarbij $a_j > 0$.

Wij herleiden dit mathematische programmeringsprobleem tot een deterministisch N-stapsbeslissingsprobleem van de volgende vorm:

$$(5.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_j = \begin{cases} 0 & \text{als } j = 1, \\ \sum_{k=1}^{j-1} a_k X_k & \text{als } j \geq 2, \end{cases} \\ X_j(S_j) \equiv \{X \mid 0 \leq X \leq \frac{b-S_j}{a_j}\}, \\ h_j(S_j, X_j) = g_j(X_j), \\ T_j(S_j, X_j) = S_j + a_j X_j. \end{array} \right.$$

Een voldoende voorwaarde voor de continuïteit wordt vermeld in de volgende stelling:

Stelling 5.1

Als de functies $g_j(X)$ continu zijn in X voor $0 \leq X \leq \frac{b}{a_j}$, dan zijn de functies $f_k(S)$ continu in S .

Bewijs:

Het bewijs door middel van volledige inductie verloopt als volgt. Eerst wordt het gestelde bewezen voor $k = 1$ en daarna voor $k = n$ onder de aanname dat het gestelde voor $k = n - 1$ juist is. Door het bewezene herhaaldelijk toe te passen kan men laten zien dat de aanname geldt voor $k = 2, 3, \dots$.

Voor $f_1(S)$ met S willekeurig geldt

$$(5.12) \quad f_1(S) = \max_{X \in X_1(S)} g_N(X)$$

en dus

$$(5.13) \quad f_1(S) = \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S}{a_N}} g_N(X).$$

Bijgevolg vinden wij voor $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
|f_1(S+\delta) - f_1(S)| &= \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S}{a_N}} g_N(X) - \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S-\delta}{a_N}} g_N(X) = \\
&= \max \left\{ \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S-\delta}{a_N}} g_N(X), \max_{\frac{b-S-\delta}{a_N} < X < \frac{b-S}{a_N}} g_N(X) \right\} - \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S-\delta}{a_N}} g_N(X) = \\
(5.14) \quad &= \max \left\{ 0, \max_{\frac{b-S-\delta}{a_N} < X < \frac{b-S}{a_N}} g_N(X) - \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S-\delta}{a_N}} g_N(X) \right\} \leq \\
&\leq \max_{\frac{b-S-\delta}{a_N} < X < \frac{b-S}{a_N}} g_N(X) - g_N\left(\frac{b-S-\delta}{a_N}\right).
\end{aligned}$$

Uit de continuïteit van $g_N(X)$ volgt dat voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta' > 0$ gevonden kan worden zodanig dat voor

$$(5.15) \quad \left| X - \frac{b-S}{a_N} \right| \leq \frac{\delta'}{a_N}$$

geldt

$$(5.16) \quad \left| g_N(X) - g_N\left(\frac{b-S}{a_N}\right) \right| \leq \varepsilon/2.$$

Uit (5.14) en (5.16) volgt voor $\delta \leq \delta'$

$$(5.17) \quad |f_1(S+\delta) - f_1(S)| \leq \varepsilon.$$

Dus voor iedere $\varepsilon > 0$ kan een $\delta' > 0$ gevonden worden zodanig dat, als $0 \leq \delta \leq \delta'$, de ongelijkheid (5.17) geldt. Op dezelfde wijze kan voor $\delta < 0$ een overeenkomstig resultaat verkregen worden. Bijgevolg kan voor iedere S en $\varepsilon > 0$ een $\delta' > 0$ gevonden worden zodanig dat, als $|\delta| \leq \delta'$, de ongelijkheid (5.17) van toepassing is. Dit impliceert dat $f_1(S)$ een continue functie is. Hiermee is de eerste inductiestap bewezen.

Als $f_{n-1}(S)$ een continue functie van S is, dan is

$$(5.18) \quad g_{N-n+1}(X) + f_{n-1}(S+a_{N-n+1}X)$$

een continue funktie van S en X .

Voor iedere S geldt

$$(5.19) \quad f_n(S) = \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S}{a_{N-n+1}}} \{g_{N-n+1}(X) + f_{n-1}(S+a_{N-n+1}X)\}.$$

Bijgevolg vinden wij voor $\delta > 0$ *)

$$(5.20) \quad \begin{aligned} |f_n(S+\delta) - f_n(S)| &= \left| \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S-\delta}{a}} \{g(X)+f(S+\delta+aX)\} - \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X)+f(S+aX)\} \right| = \\ &= \left| \max_{\frac{\delta}{a} \leq Y \leq \frac{b-S}{a}} \{g(Y - \frac{\delta}{a})+f(S+aY)\} - \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X)+f(S+aX)\} \right| = \\ &= |A - B|, \end{aligned}$$

waarbij

$$(5.21) \quad A = \max_{\frac{\delta}{a} \leq X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X - \frac{\delta}{a}) + f(S+aX)\},$$

$$(5.22) \quad B = \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X) + f(S+aX)\},$$

en

$$(5.23) \quad |A - B| = \begin{cases} A-B & \text{als } A-B \geq 0, \\ B-A & \text{als } A-B \leq 0. \end{cases}$$

De volgende relatie geldt

$$(5.24) \quad \max_{X \in B} \{p(X) + q(X)\} \leq \max_{X \in B} p(X) + \max_{X \in B} q(X).$$

Stel $A-B \geq 0$, dan geldt

*) Terwille van de eenvoud van de notatie schrijven wij in de rest van het bewijs in plaats van g_{N-n+1} , a_{N-n+1} , f_{n-1} resp. g , a , f .

$$\begin{aligned}
|A-B| &= A-B = \max_{\frac{\delta}{a} < X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X - \frac{\delta}{a}) - g(X) + g(X) + f(S+aX)\} - \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X) + f(S+aX)\} \\
(5.25) \quad &\leq \max_{\frac{\delta}{a} < X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X - \frac{\delta}{a}) - g(X)\} + \max_{\frac{\delta}{a} < X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X) + f(S+aX)\} + \\
&\quad - \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X) + f(S+aX)\} \leq \max_{\frac{\delta}{a} < X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X - \frac{\delta}{a}) - g(X)\} = \gamma_1.
\end{aligned}$$

Als $A-B < 0$, dan geldt

$$\begin{aligned}
|A-B| &= B-A = \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X) - g(X - \frac{\delta}{a}) + g(X - \frac{\delta}{a}) + f(S+aX)\} - \max_{\frac{\delta}{a} < X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X - \frac{\delta}{a}) + f(S+aX)\} \\
&\leq \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X) - g(X - \frac{\delta}{a})\} + \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X - \frac{\delta}{a}) + f(S+aX)\} + \\
(5.26) \quad &\quad - \max_{\frac{\delta}{a} < X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X - \frac{\delta}{a}) + f(S+aX)\} \leq \\
&\leq \max_{0 \leq X \leq \frac{b-S}{a}} \{g(X) - g(X - \frac{\delta}{a})\} + \max_{0 \leq X \leq \frac{\delta}{a}} \{g(X - \frac{\delta}{a}) + f(S+aX)\} + \\
&\quad - \{g(0) + f(S+\delta)\} = \gamma_2.
\end{aligned}$$

Bijgevolg geldt

$$(5.27) \quad |f_n(S+\delta) - f_n(S)| = |A-B| \leq \max(\gamma_1, \gamma_2).$$

Daar $g(X)$ continu is in X en $g(X) + f(S+aX)$ continu in S en X , is bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta' > 0$ te vinden zodanig dat voor $0 \leq \delta \leq \delta'$ geldt

$$(5.28) \quad \gamma_1 \leq \varepsilon \text{ en } \gamma_2 \leq \varepsilon \text{ en dus } |f_n(S+\delta) - f_n(S)| \leq \varepsilon.$$

Op dezelfde wijze kan voor $\delta < 0$ een overeenkomstig resultaat gevonden worden. Bijgevolg kan voor iedere S en $\varepsilon > 0$ een $\delta' > 0$ gevonden worden zodanig dat, als $|\delta| \leq \delta'$, de ongelijkheid (5.28) van toepassing is. Dit impliceert dat, als $f_{n-1}(S)$ continu in S is, dit ook geldt voor $f_n(S)$. Met behulp van het principe van volledige inductie kan het bewijs van stelling 5.1 nu worden voltooid.

Definitie 5.1a

Een funktie $\rho(Y)$ heet convex op een verzameling $\mathcal{Y} \subset E^n$ als voor iedere reële λ met $0 \leq \lambda \leq 1$ en elk tweetal punten Y_i ($i = 1, 2$), $Y_i \in \mathcal{Y}$ en $Y = \lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2 \in \mathcal{Y}$ geldt

$$(5.29) \quad \rho(\lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2) \leq \lambda \rho(Y_1) + (1-\lambda)\rho(Y_2).$$

Definitie 5.1b

Een funktie $\rho(Y)$ heet strikt convex op $\mathcal{Y}$ als voor iedere λ met $0 < \lambda < 1$ en elk tweetal punten Y_1, Y_2 met $Y_1 \neq Y_2$, $Y_i \in \mathcal{Y}$ ($i = 1, 2$) en $Y = \lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2 \in \mathcal{Y}$ geldt

$$(5.30) \quad \rho(\lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2) < \lambda \rho(Y_1) + (1-\lambda)\rho(Y_2).$$

Definitie 5.1c

Een funktie $\rho(Y)$ heet (strikt) concaaf als $-\rho(Y)$ (strikt) convex is.

Stelling 5.2

Als de funkties $g_j(X)$ (strikt) convex zijn voor $0 \leq X \leq \frac{b}{a_j}$, dan zijn de funkties $f_k(S)$ (strikt) convex in S .

Als de funkties $g_j(X)$ (strikt) concaaf zijn, dan geldt dit ook voor de funkties $f_k(S)$.

Bewijs:

Wij zullen alleen de bewering bewijzen, behorende bij het geval dat de funkties $g_j(X)$ convex zijn. De overige beweringen laten zich analoog bewijzen. Het bewijs wordt wederom met volledige inductie geleverd.

Uit de definitie van $f_1(S)$ volgt:

$$(5.31) \quad \begin{aligned} f_1(\lambda S' + (1-\lambda)S'') &= \max_{0 \leq X \leq \frac{b - (\lambda S' + (1-\lambda)S'')}{a_N}} g_N(X) = \\ &= \max_{0 \leq X \leq \lambda \frac{(b-S')}{a_N} + (1-\lambda) \frac{(b-S'')}{a_N}} g_N(X), \end{aligned}$$

waarin $0 \leq \lambda \leq 1$ is.

Wij voeren nu twee variabelen Y' en Y'' in die voldoen aan

$$(5.32) \quad 0 \leq Y' \leq \frac{b-S'}{a_N}$$

en

$$(5.33) \quad 0 \leq Y'' \leq \frac{b-S''}{a_N}$$

en wij stellen

$$(5.34) \quad X = \lambda Y' + (1-\lambda)Y''.$$

Uit (5.32) t/m (5.34) volgt

$$(5.35) \quad 0 \leq X \leq \lambda \frac{(b-S')}{a_N} + (1-\lambda) \frac{(b-S'')}{a_N}.$$

Omgekeerd kan elke X , die voldoet aan (5.35), geschreven worden als een som (5.34), waarbij voor Y' en Y'' de ongelijkheden (5.32) en (5.33) gelden. Bijgevolg geldt

$$\begin{aligned}
 f_1(\lambda S' + (1-\lambda)S'') &= \max_{0 \leq X \leq \lambda \frac{(b-S')}{a_N} + (1-\lambda) \frac{(b-S'')}{a_N}} g_N(X) = \\
 &= \max_{\substack{0 \leq Y' \leq \frac{b-S'}{a_N} \\ 0 \leq Y'' \leq \frac{b-S''}{a_N}}} \{g_N(\lambda Y' + (1-\lambda)Y'')\} \leq \\
 (5.36) \quad &\leq \max_{\substack{0 \leq Y' \leq \frac{b-S'}{a_N} \\ 0 \leq Y'' \leq \frac{b-S''}{a_N}}} \{\lambda g_N(Y') + (1-\lambda)g_N(Y'')\} = \\
 &= \lambda \max_{0 \leq Y' \leq \frac{b-S'}{a_N}} g_N(Y') + (1-\lambda) \max_{0 \leq Y'' \leq \frac{b-S''}{a_N}} g_N(Y'') = \\
 &= \lambda f_1(S') + (1-\lambda)f_1(S'').
 \end{aligned}$$

Bijgevolg is $f_1(S)$ convex in S .

Als wij aannemen dat de convexiteit van $f_{n-1}(S)$ in S bewezen is, dan is

$$(5.37) \quad g_{N-n+1}(X) + f_{n-1}(S+a_{N-n+1}X)$$

een convexe functie in X en S .

Immers (schrijf voor de eenvoud van de notatie g, a, f in plaats van resp. $g_{N-n+1}, a_{N-n+1}, f_{n-1}$) voor $X = \lambda X' + (1-\lambda)X''$ en $S = \lambda S' + (1-\lambda)S''$, $0 \leq \lambda \leq 1$, geldt

$$(5.38) \quad \begin{aligned} g(X) + f(S+aX) &\leq \lambda g(X') + (1-\lambda)g(X'') + f\{\lambda(S'+aX') + (1-\lambda)(S''+aX'')\} \leq \\ &\leq \lambda g(X') + (1-\lambda)g(X'') + \lambda f(S'+aX') + (1-\lambda)f(S''+aX'') = \\ &= \lambda\{g(X') + f(S'+aX')\} + (1-\lambda)\{g(X'') + f(S''+aX'')\}. \end{aligned}$$

Bijgevolg is (5.37) convex in X en S .

Voor $f_n(S)$ geldt

$$(5.39) \quad f_n(\lambda S' + (1-\lambda)S'') = \max_{0 \leq X \leq \frac{b - \lambda S' - (1-\lambda)S''}{a}} \{g(X) + f(\lambda S' + (1-\lambda)S'' + aX)\}.$$

Men kan gemakkelijk aantonen (zie het bewijs van $f_1(S)$), dat in plaats van (5.39) ook geldt

$$(5.40) \quad \begin{aligned} f_n(\lambda S' + (1-\lambda)S'') &= \max_{\substack{0 \leq X' \leq \frac{b-S'}{a} \\ 0 \leq X'' \leq \frac{b-S''}{a}}} \{g(\lambda X' + (1-\lambda)X'') + f(\lambda S' + (1-\lambda)S'' + \lambda aX' + (1-\lambda)aX'')\} \leq \\ &\leq \max_{\substack{0 \leq X' \leq \frac{b-S'}{a} \\ 0 \leq X'' \leq \frac{b-S''}{a}}} \left\{ \lambda [g(X') + f(S' + aX')] + (1-\lambda) [g(X'') + f(S'' + aX'')] \right\} = \\ &= \lambda f_n(S') + (1-\lambda)f_n(S''). \end{aligned}$$

Bijgevolg is $f_n(S)$ convex in S .

De stelling is juist voor $k = 1$. De stelling is eveneens juist voor $k = n$, wanneer de geldigheid voor $k = n - 1$ aangetoond is. Derhalve is het gestelde waar voor $k = 2, 3, \dots$.

Stelling 5.3

Als de functies $g_j(X)$ continu en strikt concaaf zijn voor $0 \leq X \leq \frac{b}{a_j}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) (en dus $f_j(S)$ continu en strikt concaaf in S), dan is de component $z_j^*(S)$ van de optimale strategie z^* een continue functie van S .

Bewijs:

Beschouw de uitdrukking

$$(5.41) \quad g_{N-k+1}(X) + f_{k-1}(S + a_{N-k+1}X).$$

Deze functie is continu en strikt concaaf in X en S . Laat voor $S = S_0$ het maximum van (5.41) onder $0 \leq X \leq \frac{b-S_0}{a_{N-k+1}}$ bereikt worden voor $X = X_0$; met andere woorden

$$(5.42) \quad f_k(S_0) = g_{N-k+1}(X_0) + f_{k-1}(S_0 + a_{N-k+1}X_0).$$

De functie $z_{N-k+1}^*(S)$ is continu in S_0 als voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ gevonden kan worden zodanig dat, als $|S - S_0| \leq \delta$, geldt

$$(5.43) \quad |z_{N-k+1}^*(S) - X_0| \leq \varepsilon.$$

Wij zullen nu aantonen dat, als $z_{N-k+1}^*(S)$ niet continu in S_0 is, men tot ongerijmdheden komt. Als de functie $z_{N-k+1}^*(S)$ niet continu is in S_0 , dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ zodanig dat voor iedere n een $S_\varepsilon^{(n)}$ gevonden kan worden, waarvoor geldt

$$(5.44) \quad |S_\varepsilon^{(n)} - S_0| \leq \frac{1}{n}$$

en

$$(5.45) \quad |z_{N-k+1}^*(S_\varepsilon^{(n)}) - X_0| > \varepsilon.$$

Schrijf voor $z_{N-k+1}^*(S_\varepsilon^{(n)})$:

$$z_{N-k+1}^*(S_\varepsilon^{(n)}) = X_\varepsilon^{(n)}.$$

Er geldt

$$(5.46) \quad f_k(S_\epsilon^{(n)}) = g_{N-k+1}(X_\epsilon^{(n)}) + f_{k-1}(S_0 + a_{N-k+1}X_\epsilon^{(n)}).$$

De rij $\{X_\epsilon^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ is begrensd, en bezit dus een convergente deelrij

$$(5.47) \quad \{X_\epsilon^{(n_t)}\}_{t=1}^\infty \text{ met } \lim_{t \rightarrow \infty} X_\epsilon^{(n_t)} = X_\epsilon.$$

De rij $\{S_\epsilon^{(n)}\}$ heeft S_0 als limiet.

Uit (5.45) volgt eenvoudig:

$$(5.48) \quad |X_\epsilon - X_0| \geq \epsilon.$$

Bijgevolg geldt

$$(5.49) \quad X_\epsilon \neq X_0.$$

Uit

$$(5.50) \quad 0 \leq a_{N-k+1}X_\epsilon^{(n_t)} + S_\epsilon^{(n_t)} \leq b$$

volgt bovendien

$$(5.51) \quad 0 \leq a_{N-k+1}X_\epsilon + S_0 \leq b.$$

De beslissing X_ϵ is dus toegelaten voor $S = S_0$.

Uit $\lim_{t \rightarrow \infty} X_\epsilon^{(n_t)} = X_\epsilon$, $\lim_{t \rightarrow \infty} S_\epsilon^{(n_t)} = S_0$ en de continuïteit van de functies $f_k(S)$, $g_{N-k+1}(X)$ en $f_{k-1}(S_0 + a_{N-k+1}X)$ volgt met behulp van (5.46):

$$(5.52) \quad f_k(S_0) = g_{N-k+1}(X_\epsilon) + f_{k-1}(S_0 + a_{N-k+1}X_\epsilon).$$

Men kan gemakkelijk nagaan dat ook de beslissing $\lambda X_\epsilon + (1-\lambda)X_0$, waarin $0 < \lambda < 1$, toegelaten is voor $S = S_0$. Uit (5.42), (5.49), (5.52) en het strikt concaaf zijn van (5.41) volgt nu

$$(5.53) \quad g_{N-k+1}(\lambda X_\epsilon + (1-\lambda)X_0) + f_{k-1}(S_0 + a_{N-k+1}(\lambda X_\epsilon + (1-\lambda)X_0)) > f_k(S_0).$$

De beslissing $\lambda X_\epsilon + (1-\lambda)X_0$ is dus een betere dan X_0 en dit is in

strijd met de definitie van X_0 . Daarom is de veronderstelling, dat $z_{N-k+1}^*(S)$ niet continu is in S_0 , onjuist. Het gestelde is hiermee aangetoond.

Samenvattend kunnen wij stellen dat voor het N-stapsbeslissingsprobleem (5.11) de continuïteit van de functies $g_j(X)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) een voldoende voorwaarde is voor de continuïteit van $f_{N-j+1}^*(S)$ (stelling 5.1). Voor de continuïteit van $z_j^*(S)$ moeten wij bovendien eisen dat de functies $g_j(X)$ strikt concaaf zijn (stelling 5.3).

Tenslotte nog een paar opmerkingen over de bepaling van de optimale X_j bij gegeven S_j . Daartoe formuleren wij eerst de volgende stelling:

Stelling 5.4

- a) Laat $f(x)$ concaaf zijn op een gesloten convexe *) verzameling $V \subset E^n$. Dan is elk relatief maximum van $f(x)$ op V tevens het absolute maximum van $f(x)$ op V .
- b) Als $f(x)$ strikt concaaf is op V , en $f(x)$ een absoluut maximum op V aanneemt, dan is het punt, waarin dit maximum aangenomen wordt, uniek.
- c) Als V naar beneden begrensd is (d.w.z. er is een punt $a \in E^n$ met $a \leq x$ voor alle $x \in V$), wordt het absolute minimum in één of meer extreme punten van V aangenomen. **)

Voor convexe functies geldt een overeenkomstige stelling. Deze verkrijgt men uit stelling 5.4 door concaaf, maximum en minimum te vervangen door resp. convex, minimum en maximum.

Bewijs:

- a) Stel dat $f(x)$ op V een relatief maximum in x_0 aanneemt en veronderstel dat dit maximum niet het absolute maximum is. Dan bestaat er een punt $x^* \in V$ met $f(x^*) > f(x_0)$. Beschouw het punt $x_k = \frac{1}{k} x^* + \frac{k-1}{k} x_0$

*) Een verzameling V heet convex als voor ieder tweetal punten (x_1, x_2) uit V en voor iedere λ , met $0 \leq \lambda \leq 1$, geldt: $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in V$.

**) Mits het minimum bestaat en eindig is.

- (k een natuurlijk getal). $\mathcal{V}$ is convex, zodat $x_k \in \mathcal{V}$. Uit de concaviteit van $f(x)$ volgt: $f(x_k) \geq \frac{1}{k} f(x^*) + \frac{k-1}{k} f(x_0) > f(x_0)$. Neemt men k voldoende groot dan volgt dat iedere omgeving van x_0 een punt bevat met $f(x_k) > f(x_0)$. Met deze tegenspraak is de bewering bewezen.
- b) Stel dat $f(x)$ het absolute maximum op $\mathcal{V}$ aanneemt in x_1 en x_2 , waarbij $x_1 \neq x_2$. Beschouw $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, met $x_3 \in \mathcal{V}$. Daar $f(x)$ strikt concaaf is, geldt

$$f(x_3) > \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) = f(x_1), \text{ wat leidt tot de gewenste}$$

tegenspraak.

- c) Voor het bewijs van deze bewering wordt de lezer verwezen naar G. HADLEY ^{*)}.

Als de functies $g_j(X)$ convex zijn in X , dan zijn de functies

$$(5.54) \quad g_{N-k+1}(X) + f_{k-1}(S + a_{N-k+1}X), \text{ voor } k = 1, \dots, N,$$

met $f_0(0) = 0$ eveneens convex in X (stelling 5.2). Verder is de verzameling van toegelaten beslissingen $\mathcal{X}_{N-k+1}(S)$

$$(5.55) \quad \mathcal{X}_{N-k+1}(S) \equiv \left\{ X \mid 0 \leq X \leq \frac{b-S}{a_{N-k+1}} \right\}$$

een gesloten convexe verzameling. Uit stelling 5.4 volgt tenslotte dat (5.54) onder (5.55) zijn maximum bereikt hetzij voor $X = 0$, hetzij voor $X = \frac{b-S}{a_{N-k+1}}$, hetzij voor beiden.

Als de functies $g_j(X)$ concaaf zijn, dan zijn voor een gegeven waarde van S de functies (5.54) eveneens concaaf (stelling 5.2). Uit stelling 5.4 volgt dat wij kunnen volstaan met het bepalen van een relatief maximum van (5.54) onder (5.55). Dit kan als volgt geschieden:

Beschouw achtereenvolgens de nog nader aan te geven series van punten X in (5.55). Voor iedere serie i bepalen wij het punt $X^{(i)}$ waar-

*) G. HADLEY, Non-linear and dynamic programming, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1964.

voor (5.54) zijn maximum bereikt. Als de i^{de} serie gegeven wordt door dié punten

$$(5.56) \quad x_{ir} = x^{(i-1)} - \frac{b-S}{(100)^{i-1} a_{N-k+1}} \cdot \left(\frac{r}{100} - \frac{1}{2} \right),$$

waarbij $r = 0, 1, \dots, 100$

en $i = 1, 2, \dots$,

met

$$x^{(0)} = \frac{b-S}{2a_{N-k+1}}, \text{ waarvoor geldt } 0 \leq x_{ir} \leq \frac{b-S}{a_{N-k+1}}, \text{ dan be-}$$

reikt (5.54) onder (5.55) zijn maximum voor $\lim_{i \rightarrow \infty} x^{(i)}$.

Eerder in deze paragraaf hebben wij opgemerkt dat het oplossen van N -stapsbeslissingsproblemen moeilijker wordt naarmate de dimensie van de toestandsruimte $J^{(j)}$ toeneemt. Dit wordt nog duidelijker wanneer besloten wordt het probleem op te lossen door discretisering van de toestandsruimte. Zijn de toestandsruimten $J^{(j)}$ n -dimensionaal en beschouwen men voor iedere toestandscomponent 100 verschillende waarden, dan komt men tot roosters van $(100)^n$ punten. Het behoeft geen betoog dat elke poging om tot een verlaging van de dimensie van de toestandsruimte te komen, dient te worden begroet.

In het hierna volgende wordt aangetoond dat met behulp van de multiplicatorenmethode van Lagrange in een aantal gevallen de dimensie van de toestandsruimte kan worden verlaagd. Ook nu zullen wij het een en ander toelichten aan de hand van een voorbeeld.

Wij beschouwen het volgende mathematische programmeringsprobleem:

Probleem I

Bepaal het maximum van

$$(5.57) \quad F(X) = \sum_{j=1}^N g_j(X_j),$$

onder de bijvoorwaarden

$$(5.58) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^N a_{1j} X_j \leq b_1, \\ \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j = b_2, \\ X_j \geq 0, \end{cases}$$

waarbij $a_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2$).

Wij herschrijven dit probleem tot een N-stapsbeslissingsprobleem van de volgende vorm:

Beschouw een systeem waarvoor geldt, dat voor het j^{de} beslissingstijdstip de toestandscomponenten S_{1j} en S_{2j} van S_j gegeven worden door:

$$(5.59) \quad \begin{cases} S_{1j} = \sum_{k=1}^{j-1} a_{1k} X_k, \\ S_{2j} = \sum_{k=1}^{j-1} a_{2k} X_k, \end{cases}$$

met $S_{10} = S_{20} = 0$.

De verzamelingen van toegelaten beslissingen $\mathcal{X}_j(S_j)$ worden gekarakteriseerd door:

$$(5.60) \quad \mathcal{X}_j(S_j) \equiv \{X_j | 0 \leq a_{1j} X_j \leq b_1 - S_{1j}; 0 \leq a_{2j} X_j \leq b_2 - S_{2j}\},$$

waarin $j = 1, \dots, N-1$,

en

$$(5.61) \quad \mathcal{X}_N(S_N) \equiv \{X_N | 0 \leq a_{1N} X_N \leq b_1 - S_{1N}; a_{2N} X_N = b_2 - S_{2N}\}.$$

De opbrengstfunctie $h_j(S_j, X_j)$ en de transformatie $T_j(S_j, X_j)$ worden respectievelijk vastgelegd door

$$(5.62) \quad h_j(S_j, X_j) = g_j(X_j)$$

en

$$(5.63) \quad T_j(S_j, X_j) = (S_{1j} + a_{1j} X_j, S_{2j} + a_{2j} X_j).$$

Naast probleem I zullen wij tevens in onze beschouwingen betrekken:

Probleem II

Bepaal het maximum van

$$(5.64) \quad F(X, \lambda) = \sum_{j=1}^N g_j(X_j) - \lambda \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j$$

onder de bijvoorwaarden

$$(5.65) \quad \sum_{j=1}^N a_{1j} X_j \leq b_1 \text{ en } X_j \geq 0,$$

waarbij $a_{1j} \geq 0$. ($i = 1, 2$).

Met dit probleem correspondeert het N-stapsbeslissingsprobleem waarvoor geldt dat

a) de toestandscomponent S_j gegeven wordt door

$$(5.66) \quad S_j = \sum_{k=1}^{j-1} a_{1k} X_k;$$

b) de verzameling van toegelaten beslissingen $\mathcal{X}_j(S_j)$ gegeven wordt door

$$(5.67) \quad \mathcal{X}_j(S_j) \equiv \{X_j | 0 \leq a_{1j} X_j \leq b_1 - S_j\}, \text{ waarin } j=1, \dots, N;$$

c) de opbrengstfunctie $h_j(S_j, X_j)$ en de transformatie $T_j(S_j, X_j)$ respectievelijk vastgelegd worden door

$$(5.68) \quad h_j(S_j, X_j) = g_j(X_j) - \lambda a_{2j} X_j$$

en

$$(5.69) \quad T_j(S_j, X_j) = S_j + a_{1j} X_j.$$

De N-stapsversie van probleem I vraagt om 2-dimensionale toestandsruimten $\mathcal{J}^{(j)}$, terwijl bij de N-stapsversie van probleem II kan worden volstaan met 1-dimensionale toestandsruimten. Vanuit rekentech-
nisch standpunt gezien is probleem II te verkiezen boven probleem I.

Wij zullen nu de volgende stelling bewijzen:

Stelling 5.5

Als X^{**} een optimale oplossing van probleem II is en X^{**} voldoet aan

$$(5.70) \quad \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j^{**} = b_2,$$

dan is X^{**} tevens een optimale oplossing van probleem I.

Bewijs:

Uit (5.65) en (5.70) volgt dat X^{**} voldoet aan de voorwaarden (5.58). Dus als X^* een optimale oplossing van probleem I voorstelt, dan

geldt

$$(5.71) \quad F(X^*) \geq F(X^{**})$$

en, omdat

$$(5.72) \quad \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j^* = \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j^{**} = b_2,$$

geldt tevens

$$(5.73) \quad F(X^*, \lambda) = F(X^*) - \lambda \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j^* \geq F(X^{**}) - \lambda \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j^* = F(X^{**}, \lambda).$$

Aangezien X^* voldoet aan (5.65), volgt uit (5.67) dat X^* tevens voldoet aan de voorwaarden van probleem II. Omdat X^{**} een optimale oplossing is van probleem II moet het gelijkteken gelden in (5.73) en dus ook in (5.70). Dit voltooit het bewijs.

Het is duidelijk dat met iedere λ in (5.64) een oplossing van probleem II correspondeert. Na stelling 5.5 rijst de vraag: "Bij welke λ behoort een oplossing X^{**} die voldoet aan (5.70)?" In verband met deze vraag bewijzen wij de volgende stelling:

Stelling 5.6

Als X' en X'' optimale oplossingen zijn van probleem II met $\lambda = \lambda'$, respectievelijk $\lambda = \lambda''$, en als bovendien $\lambda'' > \lambda'$, dan geldt

$$(5.74) \quad \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j' \geq \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j''.$$

Bewijs:

Aangezien zowel X' als X'' voldoen aan (5.65), volgt uit de definitie van X' en X''

$$(5.75) \quad \begin{cases} F(X') - \lambda' \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j' \geq F(X'') - \lambda' \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j'', \\ F(X'') - \lambda'' \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j'' \geq F(X') - \lambda'' \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j', \end{cases}$$

en dus

$$(5.76) \quad \begin{aligned} F(X') - \lambda' \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j' &\geq F(X'') - \lambda'' \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j'' + (\lambda'' - \lambda') \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j'' \\ &\geq F(X') - \lambda'' \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j' + (\lambda'' - \lambda') \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j''. \end{aligned}$$

Uit (5.76) volgt onmiddellijk

$$(5.77) \quad (\lambda'' - \lambda') \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j' \geq (\lambda'' - \lambda') \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j''.$$

Bijgevolg geldt, daar $\lambda'' > \lambda'$,

$$(5.78) \quad \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j' \geq \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j'',$$

waarmee het bewijs is geleverd.

Wij merkten reeds op dat bij iedere λ een optimale oplossing $X(\lambda)$ van probleem II behoort. Verder correspondeert met iedere $X(\lambda)$ een getal

$$(5.79) \quad \sum_{j=1}^N a_{2j} X_j(\lambda).$$

Indien wij λ laten variëren dan stelt (5.79) een functie $b_2(\lambda)$ van λ voor. Stelling 5.6 zegt ons dat de functie $b_2(\lambda)$ een monotoon niet-stijgende functie is van λ . Stelling 5.5 stelt vast dat de optimale oplossing van probleem I ook een optimale oplossing van probleem II is, wanneer λ voldoet aan

$$(5.80) \quad b_2(\lambda) = b_2.$$

Om een optimale oplossing van probleem I te verkrijgen zouden wij als volgt te werk kunnen gaan. Probleem II wordt achtereenvolgens opgelost voor verschillende waarden van λ . Na iedere oplossing wordt met behulp van (5.79) de bijbehorende waarde $b_2(\lambda)$ bepaald en op grond van de reeds aanwezige gegevens dié waarde λ geschat, waarvoor (5.80) geldt. Deze geschatte λ is de λ -waarde, die gebruikt moet worden in het volgende probleem uit de serie. Tenzij de functies $g_j(X_j)$ ($j = 1, \dots, N$) concaaf zijn, is het niet a priori zeker of de op deze wijze verkregen rij van λ 's convergeert naar één die voldoet aan (5.80). Wanneer de convergentie wel plaats vindt, dan hebben wij een oplossing van een moeilijk probleem verkregen door een groot aantal malen een probleem van een eenvoudiger vorm op te lossen.

Opmerkingen

1) Ingeval men in de problemen I en II minimaliseert dan geldt stelling

5.5 vanzelfsprekend ook, maar $b_2(\lambda)$ is in dit geval een monotoon niet-dalende funktie van λ .

2) Beschouw het volgende probleem:

Probleem III

Bepaal het maximum van

$$(5.81) \quad F(X) = \sum_{j=1}^N g_j(X_j)$$

onder de bijvoorwaarden

$$(5.82) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^N a_{ij} X_j \leq b_i & (i = 1, \dots, m), \\ X_j \geq 0. \end{cases}$$

Naast probleem III formuleren wij *)

Probleem IV

Bepaal het maximum van

$$(5.83) \quad F(X, \vec{\lambda}) = \sum_{j=1}^N g_j(X_j) - \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i \sum_{j=1}^N a_{ij} X_j$$

onder de bijvoorwaarden

$$(5.84) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^N a_{ij} X_j \leq b_i & (i = m_1+1, \dots, m), \\ X_j \geq 0. \end{cases}$$

De keuze van m_1 is vrij en wordt bepaald door rekentechnische overwegingen.

Het gaat er nu om een vector $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m_1}) \geq \vec{0}$ te vinden, zodanig dat de gevonden optimale oplossing van probleem IV tevens voldoet aan de extra eisen:

$$(5.85) \quad \sum_{j=1}^N a_{ij} X_j(\vec{\lambda}) \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m_1)$$

*) Vgl. de stelling van KUHN en TUCKER (zie deel 6; §11).

en

$$(5.86) \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i \left\{ b_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j(\vec{\lambda}) \right\} = 0.$$

Men kan aantonen dat een optimale oplossing van probleem IV, die voldoet aan (5.85) en (5.86), ook een optimale oplossing is van probleem III.

3) Merk op dat voor het geval dat de oplossing van probleem I geheel-tallig moet zijn (integer oplossing!), de stellingen 5.5 en 5.6 blijven gelden. Er wordt dan wel verondersteld dat een toegelaten geheeltallige oplossing bestaat waarvoor (5.58) geldt.

Voorbeeld *)

Gegeven is een drietal uitvoerhavens A_i ($i = 1, 2, 3$) waar respectievelijk de hoeveelheden a_i ($i = 1, 2, 3$) van één en hetzelfde produkt zijn opgeslagen. Ver van deze havens verwijderd bevinden zich een N-tal invoerhavens B_j ($j = 1, \dots, N$), waar behoeften bestaan aan b_j eenheden van het desbetreffende produkt ($\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^N b_j$). Stel dat de vervoerskosten voor een transport van de grootte x_{ij} van de haven A_i naar de haven B_j gegeven worden door de functie $c_{ij}(x_{ij})$. Veronderstel verder dat in elke uitvoerhaven voldoende scheepsruimte beschikbaar is en dat ieder schip slechts één invoerhaven kan aandoen. Gevraagd wordt het goedkoopste verzendschema te bepalen.

Toelichting

Het beslissingsprobleem in zijn wiskundige vorm ziet er als volgt uit:

Bepaal het minimum van

$$(5.87) \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^N c_{ij}(x_{ij})$$

onder de bijvoorwaarden

*) Vgl. het transportprobleem (deel 6; §9). De criteriumfunctie hoeft nu niet lineair te zijn.

$$(5.88) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^N x_{ij} = a_i & (i = 1, 2, 3), \\ \sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j & (j = 1, 2, \dots, N), \\ x_{ij} \geq 0, \end{cases}$$

waarbij $a_i \geq 0$ en $b_j \geq 0$.

Vanwege $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^N b_j$ kan in (5.88) de voorwaarde $\sum_{j=1}^N x_{3j} = a_3$ worden weggelaten. Immers wanneer aan de overige voorwaarden is voldaan, dan is deze voorwaarde automatisch vervuld. Men ziet nu gemakkelijk in dat, na het schrappen van de voorwaarde $\sum_{j=1}^N x_{3j} = a_3$ en het elimineren van x_{3j} met behulp van $x_{3j} = b_j - x_{1j} - x_{2j}$ ($j = 1, \dots, N$), bovenstaand probleem gelijkwaardig is met het volgende:

Bepaal het minimum van

$$(5.89) \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}(x_{1j}) + \sum_{j=1}^N c_{2j}(x_{2j}) + \sum_{j=1}^N c_{3j}(b_j - x_{1j} - x_{2j})$$

onder de bijvoorwaarden

$$(5.90) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^N x_{ij} = a_i & (i = 1, 2), \\ x_{1j} + x_{2j} \leq b_j & (j = 1, \dots, N), \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1, 2; j = 1, \dots, N). \end{cases}$$

Wij kunnen dit mathematische programmeringsprobleem herleiden tot een N-stapsbeslissingsprobleem. De toestandsgrootheid S_j behorende bij het j^{de} beslissingstijdstip wordt dan gegeven door

$$(5.91) \quad \begin{cases} S_{1j} = \sum_{k=1}^{j-1} x_{1k}; \quad S_{2j} = \sum_{k=1}^{j-1} x_{2k}, \\ S_{11} = S_{21} = 0. \end{cases}$$

Voor de transformatieformule $T_j(S_j, X_j)$ vinden wij

$$(5.92) \quad T_j(S_j, X_j) = (S_{1j} + x_{1j}, S_{2j} + x_{2j}).$$

De kosten van de j^{de} beslissing worden gegeven door

$$(5.93) \quad h_j(S_j, X_j) = c_{1j}(X_{1j}) + c_{2j}(X_{2j}) + c_{3j}(b_j - X_{1j} - X_{2j}).$$

De verzamelingen $\mathcal{X}_j(S_j)$ van de toegelaten beslissingen worden gevormd door

$$(5.94) \quad \begin{cases} \mathcal{X}_j(S_j) \equiv \{ (X_{1j}, X_{2j}) \mid 0 \leq X_{ij} \leq a_i - S_{ij}; X_{1j} + X_{2j} \leq b_j \}, \\ \text{waarin } i = 1, 2 \text{ en } j = 1, 2, \dots, N-1, \\ \mathcal{X}_N(S_N) \equiv \{ (X_{1N}, X_{2N}) \mid X_{iN} = a_i - S_{iN}; X_{1N} + X_{2N} \leq b_N \}, \\ \text{waarin } i = 1, 2. \end{cases}$$

De instrumenten gegeven in (5.91) t/m (5.94) vormen dus tezamen de N-stapsversie van het transportprobleem. De dimensie van $\mathcal{J}^{(j)}$ wordt bepaald door het aantal gelijkheden $\sum_{j=1}^N X_{1j} = a_1$ in (5.90); de dimensie van de toestandsruimte $\mathcal{J}^{(j)}$ is dus twee. Indien wij met behulp van de methode van Lagrange de gelijkheid $\sum_{j=1}^N X_{2j} = a_2$ uit de voorwaarden (5.90) willen elimineren, dan dienen wij het volgende mathematische programmeringsprobleem te beschouwen:

Bepaal het minimum van

$$(5.95) \quad \sum_{j=1}^N c_{1j}(X_{1j}) + \sum_{j=1}^N c_{2j}(X_{2j}) + \sum_{j=1}^N c_{3j}(b_j - X_{1j} - X_{2j}) - \lambda \sum_{j=1}^N X_{2j}$$

onder de bijvoorwaarden

$$(5.96) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^N X_{1j} = a_1, \\ X_{1j} + X_{2j} \leq b_j & (j = 1, \dots, N), \\ X_{ij} \geq 0 & (i = 1, 2; j = 1, \dots, N). \end{cases}$$

Ook dit programmeringsprobleem kan herleid worden tot een N-staps-beslissingsprobleem. De toestandsgrootheid S_j wordt voor dit probleem bepaald door

$$(5.97) \quad \begin{cases} S_j = \sum_{k=1}^{j-1} X_{1k} & (j = 2, \dots, N), \\ S_1 = 0. \end{cases}$$

Bijgevolg vinden wij voor de transformatie $T_j(S_j, X_j)$

$$(5.98) \quad T_j(S_j, X_j) = S_j + X_{1j}.$$

De kosten van de j^{de} beslissing worden gegeven door

$$(5.99) \quad h_j(S_j, X_j) = c_{1j}(X_{1j}) + c_{2j}(X_{2j}) + c_{3j}(b_j - X_{1j} - X_{2j}) - \lambda X_{2j}.$$

De verzamelingen $\mathcal{X}_j(S_j)$ van de toegelaten beslissingen worden gevormd door

$$(5.100) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}_j(S_j) = \{(X_{1j}, X_{2j}) \mid 0 \leq X_{1j} \leq a_1 - S_j; X_{2j} \geq 0; X_{1j} + X_{2j} \leq b_j\}, \\ \text{waarin } j = 1, \dots, N-1, \\ \mathcal{X}_N(S_N) = \{(X_{1N}, X_{2N}) \mid X_{1N} = a_1 - S_N; X_{2N} \geq 0; X_{1N} + X_{2N} \leq b_N\}. \end{array} \right.$$

Men ziet eenvoudig in dat, als men van dit N-stapsbeslissingsprobleem een oplossing kent met $\sum_{j=1}^N X_{2j} = a_2$, men slechts $X_{3j} = b_j - X_{1j} - X_{2j}$ ($j = 1, \dots, N$) hoeft te stellen om aan alle voorwaarden

$$(5.101) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^N X_{1j} = a_1 & (i = 1, 2, 3), \\ \sum_{i=1}^3 X_{ij} = b_j & (j = 1, 2, \dots, N), \\ X_{ij} \geq 0 & (i=1,2,3; j=1,2,\dots,N) \end{array} \right.$$

te kunnen voldoen.

Merk op dat de toestandsruimte $\mathcal{J}^{(j)}$ nu één-dimensionaal is. Het oorspronkelijke probleem is dus opgelost, zodra wij een λ gevonden hebben met de eigenschap dat voor de bijbehorende oplossing van het zojuist beschreven N-stapsbeslissingsprobleem geldt: $\sum_{j=1}^N X_{2j} = a_2$.

Een numerieke toepassing

Wij beschouwen een transportprobleem met drie uitvoerhavens en vier invoerhavens. De getallen a_i en b_j worden gegeven door

$$(5.102) \quad a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 8; \quad b_1 = 6, b_2 = 4, b_3 = 2, b_4 = 6.$$

De transportkosten c_{2j} als functie van het aantal verscheepte eenheden x_{ij} worden gegeven in tabel 5.1.

Tabel 5.1

x_{11}^2	x_{12}	$x_{13}^{3/2}$	$2x_{14}$
$4x_{21}^2$	$x_{22}^{3/2}$	$3x_{23}$	$2x_{24}^2$
x_{31}^2	x_{32}	x_{33}	x_{34}

Gevraagd wordt een geheeltallig optimaal verzendschema te bepalen.

Dit verzendschema zullen wij bepalen met behulp van de methode van Lagrange. Voor verschillende waarden van λ wordt probleem (5.96) (een 4-stapsbeslissingsprobleem) opgelost. Wij beginnen met $\lambda = 1$.

Voor $f_1(s_4)$ geldt

$$\begin{aligned}
 f_1(s_4) &= \min_{(x_{14}, x_{24}) \in \mathcal{X}_4(s_4)} \{2x_{14} + 2x_{24}^2 + (6 - x_{14} - x_{24}) - x_{24}\} = \\
 (5.103) \quad &= \min_{(x_{14}, x_{24}) \in \mathcal{X}_4(s_4)} \{6 + x_{14} + 2x_{24}^2 - 2x_{24}\},
 \end{aligned}$$

waarbij

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X}_4(s_4) &= \{(x_{14}, x_{24}) \mid x_{14} \geq 0; x_{14} = 3 - s_4; x_{14} + x_{24} \leq 6\}, \\
 (5.104) \quad &\text{waarin } i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Na enig rekenwerk vindt men:

Tabel 5.2

s_4	x_{14}	x_{24}	$f_1(s_4)$
0	3	0;1	9
1	2	0;1	8
2	1	0;1	7
3	0	0;1	6

Vervolgens bepalen wij $f_2(S_3)$

$$(5.105) \quad f_2(S_3) = \min_{(X_{13}, X_{23}) \in X_3(S_3)} \{X_{13}^{3/2} + 3X_{23} + (2 - X_{13} - X_{23}) - X_{23} + f_1(S_3 + X_{13})\},$$

waarbij

$$(5.106) \quad X_{13} \geq 0; X_{13} \leq 3 - S_3; X_{13} + X_{23} \leq 2, \text{ waarin } i = 1, 2.$$

Na enig rekenwerk vindt men:

Tabel 5.3

S_3	X_{13}	X_{23}	$f_2(S_3)$
0	2	0	$7+2\sqrt{2}$
1	2	0	$6+2\sqrt{2}$
2	1	0	8
3	0	0	8

Voor $f_3(S_2)$ geldt

$$(5.107) \quad f_3(S_2) = \min_{(X_{12}, X_{22}) \in X_2(S_2)} \{X_{12} + X_{22}^{3/2} + (4 - X_{12} - X_{22}) - X_{22} + f_2(S_2 + X_{12})\},$$

waarbij

$$(5.108) \quad X_{12} \geq 0; X_{12} \leq 3 - S_2; X_{12} + X_{22} \leq 4, \text{ waarin } i = 1, 2.$$

Na enig rekenwerk vindt men:

Tabel 5.4

S_2	X_{12}	X_{22}	$f_3(S_2)$
0	2	2	$8+2\sqrt{2}$
1	1;2	2	$8+2\sqrt{2}$
2	0;1	2	$8+2\sqrt{2}$
3	0	2	$8+2\sqrt{2}$

En tenslotte geldt

$$(5.108) \quad f_4(S_1) = \min_{(X_{11}, X_{21}) \in X_1(S_1)} \{X_{11}^2 + 4X_{21}^2 + (6 - X_{11} - X_{21})^2 - X_{21} + f_3(S_1 + X_{11})\}$$

waarbij

$$(5.109) \quad X_{11} \geq 0; X_{11} \leq 3 - S_1; X_{11} + X_{21} \leq 6, \text{ waarin } i = 1, 2.$$

Er geldt $S_1 = 0$. Als $S_1 = 0$ vindt men dat $f_4(S_1)$ minimaal is voor $(X_{11} = 3, X_{21} = 1)$ en $(X_{11} = 2, X_{21} = 1)$.

Met behulp van bovenstaande tabellen gaat men direct na, dat wij voor $\lambda = 1$ zes optimale oplossingen vinden. Voor drie van de zes oplossingen geldt $\sum_{j=1}^4 X_{2j} = 4$; voor de andere drie oplossingen is $\sum_{j=1}^4 X_{2j} = 3$.

Daar $b_2(\lambda)$ monotoon niet-dalend is en wij een λ zoeken zodanig dat voor het bijbehorende optimum $b_2(\lambda)$ gelijk is aan 7, is onze volgende keuze van λ een λ die groter is dan 1. Wij kiezen $\lambda = 4$. Men vindt analoog aan het voorgaande de volgende resultaten:

Tabel 5.5

S_4	X_{14}	X_{24}	$f_1(S_4)$
0	3	1	6
1	2	1	5
2	1	1	4
3	0	1	3

Tabel 5.6

S_3	X_{13}	X_{23}	$f_2(S_3)$
0	0	2	4
1	0	2	3
2	0	2	2
3	0	2	1

Tabel 5.7

S_2	X_{12}	X_{22}	$f_3(S_2)$
0	0	4	-4
1	0	4	-5
2	0	4	-6
3	0	4	-7

Als $S_1 = 0$ is $f_4(S_1)$ minimaal voor $(X_{11} = 3, X_{21} = 1)$. Voor de bij $\lambda = 4$ behorende optimale oplossing geldt dan dat $\sum_{j=1}^4 X_{2j} = b_2(4) = 8$. Deze waarde van $b_2(\lambda)$ is groter dan 7.

De volgende waarde van λ , die wij zullen gebruiken, bepalen wij met behulp van lineaire interpolatie

$$(5.110) \quad \lambda = \lambda_1 + \{b(\lambda) - b(\lambda_1)\} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{b(\lambda_2) - b(\lambda_1)}$$

Neem $\lambda_1 = 1$ en $b(1) = 4$, verder $\lambda_2 = 4$, $b_2(4) = 8$. Men vindt dan

$$\lambda = 1 + (7-4) \cdot \frac{4-1}{8-4} = 3\frac{1}{4}.$$

Zo vindt men voor $\lambda = 3\frac{1}{4}$ na enig rekenwerk dat $b_2(\lambda) = 8$. Met behulp van lineaire interpolatie (hierbij kiezen wij uit de reeds gevonden λ -waarden voor λ_1 de grootste λ met $b_2(\lambda) < 7$ en voor λ_2 de kleinste λ met $b(\lambda) > 7$) vinden wij de volgende rij λ 's, waarvoor wij achtereenvolgens $b_2(\lambda)$ bepalen:

Tabel 5.8

λ	$b_2(\lambda)$
1	4
4	8
$3\frac{1}{4}$	8
43/16	8
145/64	8
499/256	6
538,5/256	8
519,25/256	8
509,125/256	6
514,1875/256	8
511,65625/256	6
512,921875/256	8
.	.
.	.
.	.

Deze rij λ 's convergeert naar $\lambda = 2$. Voor $2 < \lambda \leq 4$ is $b_2(\lambda) = 8$, terwijl $b_2(\lambda) = 6$ voor $499/256 \leq \lambda < 2$. Het blijkt dat voor $\lambda = 2$ de functie $b_2(\lambda)$ de waarde 7 aanneemt. Men vindt na enig rekenwerk voor $\lambda = 2$:

Tabel 5.9

S_4	X_{14}	X_{24}	$f_1(S_4)$
0	3	1	8
1	2	1	7
2	1	1	6
3	0	1	5

Tabel 5.10

S_3	X_{13}	X_{23}	$f_2(S_3)$
0	2	0	$6+2\sqrt{2}$
1	22	0	$5+2\sqrt{2}$
2	1	0;1	7
3	0	0;1;2	7

Tabel 5.11

S_2	X_{12}	X_{22}	$f_3(S_2)$
0	2	2	$5+2\sqrt{2}$
1	1	3	$2+3\sqrt{3}$
2	0	4	7
3	0	4	7

Als $S_1 = 0$ is $f_4(S_1)$ minimaal voor $(X_{11} = 3, X_{21} = 1)$ en voor $(X_{11} = 2, X_{21} = 1)$.

Met behulp van de tabellen 5.9 t/m 5.11 gaat men direct na, dat er voor $\lambda = 2$ vijf optimale oplossingen zijn. Voor één van deze oplossingen is $b_2(\lambda) = 8$; voor twee van de oplossingen geldt $b_2(\lambda) = 6$. Voor de volgende twee optimale oplossingen is $b_2(\lambda) = 7$:

$$\begin{aligned}
 (5.111) \quad & \left\{ \begin{array}{l} x_{11} = 3, x_{12} = 0, x_{13} = 0, x_{14} = 0 \\ x_{21} = 1, x_{22} = 4, x_{23} = 1, x_{24} = 1 \end{array} \right. \\
 \text{en} \\
 (5.112) \quad & \left\{ \begin{array}{l} x_{11} = 2, x_{12} = 0, x_{13} = 1, x_{14} = 0 \\ x_{21} = 1, x_{22} = 4, x_{23} = 1, x_{24} = 1. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Bijgevolg zijn onderstaande verzendschema's optimaal:

Tabel 5.12

De optimale verzendschema's

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	3	0	0	0
A ₂	1	4	1	1
A ₃	2	0	1	5

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
A ₁	2	0	1	0
A ₂	1	4	1	1
A ₃	3	0	0	5

De minimale kosten bedragen 36.

Tenslotte geven wij een 5-stapsbeslissingsprobleem waarvan de dimensie van de bijbehorende toestandruimte groter dan één is, n.l. vier. Door handig te werk te gaan zijn wij in staat het probleem op te lossen. Ondanks de waarde van de dimensie van de toestandruimte kunnen wij vrij eenvoudig de functies $f_{N-k+1}(S_k)$ en de optimale strategiecomponenten $z_k^*(S_k)$ bepalen door eerst uit de formulering van het probleem enkele evidente conclusies te trekken en enkele evidente beslissingen aan te geven.

Een opleidingsprobleem.

Een koloniaal gebied, dat over vijf jaar zelfbestuur zal verkrijgen, wordt door het moederland voorbereid op deze onafhankelijkheid. Om een gezonde basis voor zelfbestuur te scheppen zijn een aantal plannen uitgewerkt, waarvan er één betrekking heeft op de gezondheidszorg. Hierover is door deskundigen een rapport samengesteld, waarin o.a. de wens geuit wordt, dat de volgende drie cursussen worden georganiseerd:

- opleiding tot ziekenverzorger;
- opleiding tot instructeur-ziekenverzorger A;
- opleiding tot instructeur-ziekenverzorger B.

Deze cursussen duren alle één jaar en kunnen slechts in de hierboven gegeven volgorde worden doorlopen. Voor het doceren zijn de volgende drie categorieën instructeurs te onderscheiden:

- 1) de door het moederland uit te zenden all-round instructeurs;
- 2) instructeur-ziekenverzorger B;
- 3) instructeur-ziekenverzorger A.

Van de eerste categorie zijn er slechts vijf beschikbaar.

In tabel 5.13 stellen de getallen de maximale aantallen cursusdeelnemers voor, die bij een bepaalde cursus door een bepaalde instructeur tegelijkertijd kunnen worden opgeleid.

Tabel 5.13

instructeur cursus	1	2	3
a	5	5	5
b	3	3	-
c	2	-	-

De vakjes met streepjes geven de "onmogelijke opleidingen" aan. Zo kan bijv. een instructeur-ziekenverzorger A onmogelijk de cursussen b) en c) leiden. Uit de tabel blijkt bijv. dat alleen een all-round instructeur de opleiding c) mag leiden en dat hij daarbij maximaal 2 personen tegelijkertijd kan instrueren.

Verder wordt aangenomen dat:

- 1e) het leerlingenreservoir onbeperkt is;
- 2e) iedere leerling geschikt is om elke opleiding te volgen;
- 3e) wanneer iemand eenmaal de status van instructeur bezit, hij nooit meer als ziekenverzorger dienst zal doen.

De deskundigen vragen zich nu af, hoe de instructeurs in de verschillende jaren over de opleidingen moeten worden verdeeld om in de nog resterende vijf overgangsjaren het maximale aantal "verplegingsjaren" te verkrijgen (Een "verplegingsjaar" is een jaar, waarin één ziekenverzorger gedurende één jaar geheel ter beschikking staat van de verpleging. Zo spreekt men van 8 "verplegingsjaren" als bijv. 4 ziekenverzorgers gedurende 2 jaar geheel ter beschikking staan van de verpleging).

Omschrijving van het mathematische model.

Onder het systeem zullen wij verstaan "de opleiding van verplegend personeel". Alle personen, die bij dit systeem betrokken zijn, kunnen worden ingedeeld naar hun status σ_n en naar hun functie ϕ_n .

Tabel 5.13aOverzicht van de diverse status

Statusaan- duiding	Omschrijving van de status
σ_0	nog nooit bij een opleiding betrokken geweest
σ_1	alleen opgeleid tot ziekenverzorger
σ_2	opgeleid tot instructeur-ziekenverzorger A (maar niet tot instructeur-ziekenverzorger B)
σ_3	opgeleid tot instructeur-ziekenverzorger B
σ_4	all-round instructeur

Tabel 5.13bOverzicht van de mogelijke functies

Functie- aanduiding	Omschrijving van de werkzaamheden
ϕ_0	in opleiding
ϕ_1	ziekenverzorger
ϕ_2	instructeur bij de opleiding van σ_0 tot σ_1
ϕ_3	instructeur bij de opleiding van σ_1 tot σ_2
ϕ_4	instructeur bij de opleiding van σ_2 tot σ_3

Tabel 5.13c

Schema voor het verdelen der functies
over de verschillende status

Status	Mogelijke functie(s)
σ_0	ϕ_0
σ_1	ϕ_0, ϕ_1
σ_2	ϕ_0, ϕ_2
σ_3	ϕ_2, ϕ_3
σ_4	ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4

Wanneer wij zeggen dat iemand de functie ϕ_i bekleedt, dan wil dat zeggen dat deze persoon daadwerkelijk te werk gesteld is in de functie ϕ_i , ongeacht de status van de desbetreffende persoon; het is bijv. heel goed mogelijk dat iemand, ook al heeft hij de status σ_4 , gedurende één of meer jaren te werk gesteld is in de functie σ_2 .

Met behulp van tabel 5.13a definiëren wij de toestandscomponent S_j ($j = 1, \dots, 5$) als volgt: de toestandsvector S_j zal aangeven hoeveel personen er op het j^{de} beslissingstijdstip (nog voordat de j^{de} beslissing genomen is) bij het systeem betrokken zijn en in welke status. Wij schrijven deze toestandsvectoren als volgt:

$$(5.113) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 = (S_{0,1}, S_{1,1}, S_{2,1}, S_{3,1}, S_{4,1}) \\ S_2 = (S_{0,2}, S_{1,2}, S_{2,2}, S_{3,2}, S_{4,2}) \\ \vdots \\ S_5 = (S_{0,5}, S_{1,5}, S_{2,5}, S_{3,5}, S_{4,5}) \end{array} \right.$$

zodat de toestandsvector S_j wordt weergegeven door

$$(5.114) \quad S_j = (S_{0,j}, S_{1,j}, S_{2,j}, S_{3,j}, S_{4,j}).$$

Hierin geeft de component $S_{h,j}$ het aantal personen aan dat op het j^{de} beslissingstijdstip de status σ_h heeft. Omdat $S_{0,j}$ voor $j = 1, 2, \dots, 5$ steeds oneindig groot is, kunnen wij deze component gemakshalve uit S_j

weglaten, waardoor (5.114) overgaat in

$$(5.115) \quad S_j = (S_{1,j}, S_{2,j}, S_{3,j}, S_{4,j}).$$

Wanneer wij dit formalisme strikt handhaven, dan zullen wij moeten stellen:

$$(5.116) \quad S_1 = \{0, 0, 0, 5\},$$

omdat, zolang het systeem nog geen jaar in werking is, er nog niemand is met de status σ_h ($h = 1, 2, 3$), terwijl gegeven is dat er 5 all-round instructeurs beschikbaar zijn. Het ligt voor de hand om nu reeds vast te stellen dat er in het eerste jaar zoveel mogelijk leerlingen moeten worden opgeleid tot ziekenverzorger. Het gevolg hiervan is dat

$$(5.117) \quad S_2 = \{25, 0, 0, 5\}.$$

Het verdere verloop van het systeem is afhankelijk van de beslissingen die op het tweede, derde, vierde en vijfde beslissingstijdstip genomen zullen worden.

De op het j^{de} beslissingstijdstip ($j = 1, \dots, 5$) te nemen beslissingen X_j definiëren wij als vectoren $X_j = (x_{hij})$ met componenten x_{hij} ($h = 0, 1, 2, 3, 4$; $i = 0, 1, 2, 3, 4$) in één of andere volgorde gerangschikt; hierbij is x_{hij} het aantal personen met status σ_h dat in het j^{de} jaar te werk gesteld zal worden in de functie ϕ_i .

Oplossing.

De beslissingen X_j en de toestandsgrootheden S_j ($j = 1, \dots, 5$) hebben wij hiervoor al gedefinieerd. Uit de formulering van het probleem en de definities van S_j en X_j volgt dat de transformatie $S_{j+1} = T_j(S_j, X_j)$ gegeven wordt door de onderstaande relaties

$$(5.118) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{1,j+1} = S_{1,j} - x_{10j} + x_{00j} \\ S_{2,j+1} = S_{2,j} - x_{20j} + x_{10j} \\ S_{3,j+1} = S_{3,j} + x_{20j} \\ S_{4,j+1} = 5 \end{array} \right\} \quad (j = 1, \dots, 4),$$

waarbij

$$(5.119) \quad S_{11} = S_{21} = S_{31} = 0; S_{41} = 5.$$

Voor de opbrengstfunctie $h_j(S_j, X_j)$ kiezen wij het aantal "verplegingsjaren" dat het j^{de} jaar oplevert. Bijgevolg geldt

$$(5.120) \quad h_j(S_j, X_j) = S_{1,j} - x_{10j} \quad \text{met } j = 1, \dots, 5.$$

Men gaat eenvoudig na dat de verzameling van toegelaten beslissingen $X_j(S_j, X_j)$ ($j = 1, \dots, 5$) gegeven wordt door

$$(5.121) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_{00j} \leq 5(S_{2,j} + S_{3,j} + S_{4,j}) \\ 0 \leq x_{10j} \leq \min(S_{1,j}; 3(S_{3,j} + S_{4,j})) \\ x_{11j} = S_{1,j} - x_{10j} \\ 0 \leq x_{20j} \leq \min(S_{2,j}; 2S_{4,j}) \\ x_{22j} = S_{2,j} - x_{20j} \\ 0 \leq x_{32j} \leq S_{3,j} \\ x_{33j} = S_{3,j} - x_{32j} \\ x_{42j} + x_{43j} + x_{44j} \leq S_{4,j} \\ x_{42j}, x_{43j}, x_{44j} \geq 0. \end{array} \right.$$

Indien

$$(h, i) \notin \{(0,0); (1,0); (1,1); (2,0); (2,2); (3,2); (3,3); (4,2); (4,3); (4,4)\}$$

dan geldt

$$(5.122) \quad x_{hij} = 0.$$

Verder moet gelden

$$(5.123) \quad \left\{ \begin{array}{l} 5(x_{22j} + x_{32j} + x_{42j}) \geq x_{00j} \\ 3(x_{33j} + x_{43j}) \geq x_{10j} \\ 2x_{44j} \geq x_{20j} \end{array} \right.$$

Zoals wij weten worden de funkties $f_{5-k+1}(S_k)$ gegeven door

$$(5.124) \quad f_{5-k+1}(S_k) = \max_{X_k \in X_k(S_k)} \{h_k(S_k, X_k) + f_{5-k}(T_k(S_k, X_k))\}$$

met $f_0 = 0$.

Voor de funktie $f_1(S_5)$ vinden wij

$$(5.125) \quad f_1(S_5) = \max_{x_5 \in \mathcal{X}_5(S_5)} \{S_{1,5} - x_{105}\} = S_{1,5}.$$

Bijgevolg geldt

$$(5.126) \quad z_5^*(S_5) = x_5 \quad \text{met} \quad x_5 \in \mathcal{X}_5(S_5) \quad \text{en} \quad x_{105} = 0.$$

Voor de funktie $f_2(S_4)$ geldt

$$(5.127) \quad f_2(S_4) = \max_{x_4 \in \mathcal{X}_4(S_4)} \{(S_{1,4} - x_{104}) + S_{1,4} - x_{104} + x_{004}\}.$$

Daar het opleiden van personen met de status σ_1 in het vierde jaar bij voorbaat ongunstig is, kiezen wij

$$(5.128) \quad x_{104} = 0.$$

Zo heeft het evenmin zin om in het vierde jaar nog op te leiden van σ_2 tot σ_3 . Met behulp hiervan leiden wij gemakkelijk af, dat moet gelden

$$(5.129) \quad f_2(S_4) = \max_{x_4 \in \mathcal{X}_4(S_4)} \{2S_{1,4} + x_{004}\} = 2S_{1,4} + 5(S_{2,4} + S_{3,4} + S_{4,4})$$

en

$$(5.130) \quad \begin{cases} z_4^*(S_4) = x_4 & \text{met} \quad x_4 \in \mathcal{X}_4(S_4); \\ x_{004} = 5(S_{2,4} + S_{3,4} + S_{4,4}); \\ x_{104} = x_{204} = 0; \\ x_{324} = S_{3,4}; \\ x_{424} = S_{4,4}. \end{cases}$$

Uit het voorgaande volgt dat er in het vierde jaar alleen aandacht besteed zal worden aan de opleiding van σ_0 tot σ_1 .

Op het derde beslissingstijdstip zijn er nog geen personen met de status σ_3 (dus $S_{3,3} = 0$), zoals blijkt uit het volgende schema.

Tabel 5.14

Beslissingstijdstip	Mogelijk voorkomende status
1	σ_0, σ_4
2	$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_4$
3	$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_4$

Leiden wij in het derde jaar op van σ_0 tot σ_3 dan zullen er op het vierde beslissingstijdstip personen zijn met de status σ_3 . In het vierde jaar zullen alleen instructeurs betrokken zijn bij de opleiding van σ_0 tot σ_1 , en om instructeur bij deze opleiding te kunnen zijn is het voldoende de status σ_2 te hebben. Hieruit volgt dat het geen zin heeft om het derde jaar (all-round) instructeurs beschikbaar te stellen voor de opleiding van σ_2 tot σ_3 . Hieruit volgt dat er op het vierde beslissings-tijdstip ook geen personen met de status σ_3 zullen zijn; dus

$$(5.131) \quad S_{3,4} = 0 \text{ en verder } x_{203} = 0.$$

Met behulp van (5.131) en uit het feit dat $S_{4,j} = 5$ voor $j = 1, \dots, 5$, vinden wij dan voor $f_2(S_4)$

$$(5.132) \quad f_2(S_4) = 25 + 2S_{1,4} + 5S_{2,4}.$$

Voor $f_3(S_3)$ vinden wij

$$(5.133) \quad \begin{aligned} f_3(S_3) &= \max_{x_3 \in \mathcal{X}_3(S_3)} \{ (S_{1,3} - x_{103}) + 2(S_{1,3} - x_{103} + x_{003}) + 5(S_{2,3} - x_{203} + x_{103}) + 25 \} = \\ &= \max_{x_3 \in \mathcal{X}_3(S_3)} \{ 25 + 3S_{1,3} + 2x_{003} + 2x_{103} + 5S_{2,3} \}. \end{aligned}$$

Als er in het derde jaar x_{103} personen met de status σ_1 worden opgeleid tot σ_2 dan zijn hiervoor $\left\lceil \frac{x_{103}}{3} \right\rceil +$ instructeurs nodig *). Aangezien er in het derde jaar niemand wordt opgeleid van σ_2 tot σ_3 zullen er voor de opleiding van σ_0 tot σ_1

$$(5.134) \quad 5 + S_{2,3} - \left\lceil \frac{x_{103}}{3} \right\rceil +$$

instructeurs beschikbaar zijn. Het zal duidelijk zijn dat elk der laatstgenoemde instructeurs 5 leerlingen zal moeten opleiden. Bijgevolg geldt

*) $\left\lceil \frac{x_{103}}{3} \right\rceil +$ is het kleinste getal dat groter is dan of gelijk aan $\frac{x_{103}}{3}$.

$$(5.135) \quad x_{003} = 5 \left\{ 5 + s_{2,3} - \left[\frac{x_{103}}{3} \right]^+ \right\}.$$

Hierdoor is (5.133) ook als volgt te schrijven:

$$(5.136) \quad \begin{aligned} f_3(s_3) &= 25 + 3s_{1,3} + 5s_{2,3} + 2 \max_{x_3 \in \mathcal{X}_3(s_3)} \{x_{103} + 25 + 5s_{2,3} - 5 \left[\frac{x_{103}}{3} \right]^+ \} = \\ &= 75 + 3s_{1,3} + 15s_{2,3} + 2 \max_{x_3 \in \mathcal{X}_3(s_3)} \{x_{103} - 5 \left[\frac{x_{103}}{3} \right]^+ \}. \end{aligned}$$

Voor positieve waarden van x_{103} is de vorm tussen accoladen in (5.136) altijd negatief, terwijl deze vorm gelijk aan nul is, als wij $x_{103} = 0$ kiezen. Bijgevolg geldt

$$(5.137) \quad f_3(s_3) = 75 + 3s_{1,3} + 15s_{2,3}$$

en

$$(5.138) \quad \begin{cases} z_3^*(s_3) = x_3 & \text{met } x_3 \in \mathcal{X}_3(s_3); \\ x_{003} = 25 + 5s_{2,3}; \\ x_{103} = x_{203} = x_{323} = 0; \\ x_{423} = 5. \end{cases}$$

Voor de funktie $f_4(s_2)$ geldt

$$(5.139) \quad f_4(s_2) = \max_{x_2 \in \mathcal{X}_2(s_2)} \{ (s_{1,2} - x_{102}) + 75 + 3(s_{1,2} + x_{002} - x_{102}) + 15(s_{2,2} + x_{102} - x_{202}) \}.$$

Op het tweede beslissingstijdstip zijn er nog personen met status σ_2 (dus $s_{2,2} = 0$ en $x_{202} = 0$), zodat

$$(5.140) \quad f_4(s_2) = \max_{x_2 \in \mathcal{X}_2(s_2)} \{ 75 + 4s_{1,2} + 3x_{002} + 11x_{102} \}.$$

Als er in het tweede jaar x_{102} personen worden opgeleid van σ_1 tot σ_2 dan zijn hiervoor $\left[\frac{x_{102}}{3} \right]^+$ (all-round)instructeurs nodig. Hieruit volgt vrijwel

direct (bedenk $S_{2,2} = S_{3,2} = 0$), dat x_{002} dan gegeven wordt door

$$(5.141) \quad x_{002} = 5 \left\{ 5 - \left[\frac{x_{102}}{3} \right]^+ \right\}.$$

Bijgevolg geldt

$$(5.142) \quad \begin{aligned} f_4(S_2) &= \max_{x_2 \in \mathcal{X}_2(S_2)} \left\{ 75 + 4S_{1,2} + 11x_{102} + 75 - 15 \left[\frac{x_{102}}{3} \right]^+ \right\} = \\ &= 150 + 4S_{1,2} + \max_{x_2 \in \mathcal{X}_2(S_2)} \left\{ 11x_{102} - 15 \left[\frac{x_{102}}{3} \right]^+ \right\}. \end{aligned}$$

Voor x_{102} geldt (zie (5.121))

$$(5.143) \quad 0 \leq x_{102} \leq \min(S_{1,2}; 3(S_{3,2} + S_{4,2})).$$

Het is duidelijk dat wij in het eerste jaar zoveel mogelijk inlanders zullen opleiden tot ziekenverzorger, zodat $S_{1,2} = 25$. Verder is het direct duidelijk dat $S_{3,2} = 0$ en $S_{4,2} = 5$. Bijgevolg geldt

$$(5.144) \quad 0 \leq x_{102} \leq 15.$$

De vorm tussen accoladen in (5.142) is maximaal voor $x_{102} = 15$. Hieruit volgt dus dat

$$(5.145) \quad f_4(S_2) = 150 + 4S_{1,2} + 90 = 240 + 4S_{1,2}$$

en

$$(5.146) \quad \begin{cases} z_2^*(S_2) = x_2 & \text{met } x_2 \in \mathcal{X}_2(S_2); \\ x_{002} = x_{202} = x_{322} = 0; \\ x_{102} = 15; \\ x_{432} = 5. \end{cases}$$

Tenslotte vinden we

$$(5.147) \quad f_5(S_1) = \max_{x_1 \in \mathcal{X}_1(S_1)} \left\{ (S_{1,0} - x_{101}) + 240 + 4(S_{1,0} - x_{101} + x_{001}) \right\}.$$

Daar $S_{1,0} = x_{101} = 0$, kunnen wij $f_5(S_1)$ schrijven als

$$(5.148) \quad f_5(S_1) = \max_{x_1 \in \mathcal{X}_1(S_1)} \{ 240 + 4x_{001} \} = 240 + 4 \cdot 25 = 340.$$

Verder geldt

$$(5.149) \quad \begin{cases} z_1^*(S_1) = x_1 & \text{met } x_1 \in \mathcal{X}_1(S_1); \\ x_{001} = 25; \\ x_{421} = 5; \\ \text{overige } x_{ni1} = 0. \end{cases}$$

De maximale opbrengst bedraagt 340.

Tenslotte geven wij hieronder het optimale beslissingsschema op overzichtelijke wijze weer.

Tabel 5.15

Het optimale beslissingsschema

Beslissings- tijdstip	Optimale beslissing
1	Elke all-round instructeur moet 5 inlanders opleiden van σ_0 tot σ_1 .
2	Elke all-round instructeur moet 3 inlanders opleiden van σ_1 tot σ_2 terwijl er 10 inlanders als ziekenverzorger te werk gesteld moeten worden.
3	De opleiding van σ_1 tot σ_2 moet worden stopgezet, terwijl elke beschikbare instructeur (in totaal zijn dat er intussen 20) 5 inlanders moet opleiden van σ_0 tot σ_1 . Er blijven 10 inlanders als ziekenverzorger werkzaam.
4	Elke beschikbare instructeur moet 5 inlanders van σ_0 tot σ_1 opleiden. De 110 inlanders, die de status σ_1 hebben, zullen allen een taak als ziekenverzorger toegewezen krijgen.
5	Alle personen met status σ_1 (210 man) moeten als ziekenverzorger te werk gesteld worden. Het verdere opleidings-schema is irrelevant (zie (5.126)).

Betreffende de aantallen verplegingsjaren geven wij nog het volgende overzicht:

Tabel 5.16

Jaar	Aantal verplegingsjaren
1	0
2	10
3	10
4	100+10 = 110
5	100+100+10 = 210
totaal	340

Literatuur

A.KAUFMANN and R.CRUON, Dynamic programming: sequential scientific management, Academic Press, New York, (1967).

R.BELLMAN, Dynamic programming, Princeton University Press, Princeton, (1957).

R.BELLMAN, Adaptive control processes: a guided tour, Princeton University Press, Princeton, (1961).

R.BELLMAN and S.E.DREYFUS, Applied dynamic programming, Princeton University Press, Princeton, (1962).

G.HADLEY, Non-linear and dynamic programming, Addison-Wesley, Reading, (1964).

O.L.R.JACOBS, An introduction to dynamic programming: the theory of multistage decision processes, Chapman & Hall Ltd., London, (1967).

UITGAVEN IN DE SERIE MC SYLLABUS

Onderstaande uitgaven zijn verkrijgbaar bij het Mathematisch Centrum,
2e Boerhaavestraat 49 te Amsterdam-1005, tel. 020-947272.

-
- | | |
|----------|---|
| MCS 1.1 | F. GÖBEL & J. VAN DE LUNE, <i>Leergang Besliskunde, deel 1: Wiskundige basiskennis</i> , 1965. ISBN 90 6196 014 2. |
| MCS 1.2 | J. HEMELRIJK & J. KRIENS, <i>Leergang Besliskunde, deel 2: Kansberekening</i> , 1965. ISBN 90 6196 015 0. |
| MCS 1.3 | J. HEMELRIJK & J. KRIENS, <i>Leergang Besliskunde, deel 3: Statistiek</i> , 1966. ISBN 90 6196 016 9. |
| MCS 1.4 | G. DE LEVE & W. MOLENAAR, <i>Leergang Besliskunde, deel 4: Markovketen, en wachttijden</i> , 1966. ISBN 90 6196 017 7. |
| MCS 1.5 | G. DE LEVE & J. KRIENS, <i>Leergang Besliskunde, deel 5: Inleiding tot de mathematische besliskunde</i> , 1966. ISBN 90 6196 018 5. |
| MCS 1.6a | B. DORHOUT & J. KRIENS, <i>Leergang Besliskunde, deel 6a: Wiskundige programmering 1</i> , 1968. ISBN 90 6196 032 0. |
| MCS 1.7a | G. DE LEVE, <i>Leergang Besliskunde, deel 7a: Dynamische programmering 1</i> , 1968. ISBN 90 6196 033 9. |
| MCS 1.7b | G. DE LEVE & H.C. TIJMS, <i>Leergang Besliskunde, deel 7b: Dynamische programmering 2</i> , 1970. ISBN 90 6196 055 X. |
| MCS 1.7c | G. DE LEVE & H.C. TIJMS, <i>Leergang Besliskunde, deel 7c: Dynamische programmering 3</i> , 1971. ISBN 90 6196 066 5. |
| MCS 1.8 | J. KRIENS et al., <i>Leergang Besliskunde, deel 8: Minimaxmethode, netwerkplanning, simulatie</i> , 1968. ISBN 90 6196 034 7. |
| MCS 2.1 | G.J.R. FÖRCH et al., <i>Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 1</i> , 1967. ISBN 90 6196 023 1. |
| MCS 2.2 | L. DEKKER et al., <i>Colloquium stabiliteit van differentieschema's, deel 2</i> , 1968. ISBN 90 6196 035 5. |
| MCS 3.1 | H.A. LAUWERIER, <i>Randwaardeproblemen, deel 1</i> , 1967. ISBN 90 6196 024 X. |
| MCS 3.2 | H.A. LAUWERIER, <i>Randwaardeproblemen, deel 2</i> , 1968. ISBN 90 6196 036 3. |
| MCS 3.3 | H.A. LAUWERIER, <i>Randwaardeproblemen, deel 3</i> , 1968. ISBN 90 6196 043 6. |
| MCS 4 | H.A. LAUWERIER, <i>Representaties van groepen</i> , 1968. ISBN 90 6196 037 1. |
| MCS 5 | J.H. VAN LINT et al., <i>Colloquium discrete wiskunde</i> , 1968. ISBN 90 6196 044 4. |
| MCS 6 | K.K. KOKSMA, <i>Cursus ALGOL 60</i> , 1969. ISBN 90 6196 045 2. |
| MCS 7.1 | <i>Colloquium moderne rekenmachines, deel 1</i> , 1969. ISBN 90 6196 046 0. |
| MCS 7.2 | <i>Colloquium moderne rekenmachines, deel 2</i> , 1969. ISBN 90 6196 047 9. |
| MCS 8 | H. BAVINCK & J. GRASMAN, <i>Relaxatietrillingen</i> , 1969. ISBN 90 6196 056 8 |

- MCS 9.1 T.M.T. COOLEN et al., *Colloquium elliptische differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1970. ISBN 90 6196 049 5.
- MCS 10 J. FABIUS & W.R. VAN ZWET, *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*, 1970. ISBN 90 6196 057 6.
- MCS 11 H. BART et al., *Colloquium halfalgebra's en positieve operatoren*, 1971. ISBN 90 6196 067 3.
- MCS 12 T.J. DEKKER, *Numerieke algebra*, 1971. ISBN 90 6196 068 1.
- MCS 13 F.E.J. KRUSEMAN ARETZ, *Programmeren voor rekenautomaten; De MC ALGOL 60 vertaler voor de EL X8*, 1971. ISBN 90 6196 069 X.
- MCS 14 H. BAVINCK et al., *Colloquium approximatietheorie*, 1971. ISBN 90 6196 070 3.
- MCS 15.1 T.J. DEKKER et al., *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 1*, 1972. ISBN 90 6196 078 9.
- MCS 15.2 P.A. BEENTJES et al., *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 2*, 1973. ISBN 90 6196 079 7.
- *MCS 15.3 P.A. BEENTJES et al., *Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen, deel 3*, 1972.
- MCS 16.1 L. GEURTS, *Cursus programmeren, deel 1: De elementen van het programmeren*, 1973. ISBN 90 6196 080 0.
- MCS 16.2 P.A. BEENTJES et al., *Cursus programmeren, deel 2: De programmeertaal ALGOL 60*, 1973. ISBN 90 6196 087 8.
- MCS 17.1 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 1*, 1974. ISBN 90 6196 090 8.
- MCS 17.2 P.S. STOBBE, *Lineaire algebra, deel 2*, 1974. ISBN 90 6196 091 6.
- MCS 18 F. VAN DER BLIJ et al., *Een kwart eeuw wiskunde, Syllabus van de Vakantiecursus 1971*, 1974. ISBN 90 6196 092 4.
- MCS 19 A. HORDIJK et al., *Optimaal stoppen van Markovketens*, 1974. ISBN 90 6196 093 2.
- MCS 20 T.M.T. COOLEN et al., *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen*, 1974. ISBN 90 6196 094 0.
- MCS 21 J.W. DE BAKKER (Red.), *Colloquium Programmacorrectheid*, 1974. ISBN 90 6196 103 3.
- *MCS 22 R. HELMERS et al., *Werkweek Statistiek*, 1973. ISBN 90 6196 104 1.
- *MCS 23.1 J.W. DE ROEVER (Red.), *Colloquium Onderwerpen uit de Biomathematica, deel 1*, 1973. ISBN 90 6196 105 X.
- *MCS 23.2 J.W. DE ROEVER (Red.), *Colloquium Onderwerpen uit de Biomathematica, deel 2*, 1973. ISBN 90 6196 115 7.
- *MCS 24.1 P.J. VAN DER HOUWEN, *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, deel 1: Eenstapsmethoden*, 1974. ISBN 90 6196 106 8.
- *MCS 25 L. GEURTS (Red.), *Colloquium Structuur van Programmeertalen*, 1974. ISBN 90 6196 116 5.
- *MCS 26 N.M. TEMME (Red.), *Colloquium Niet-lineaire Analyse*, 1975. ISBN 90 6196 117 3.

De met een * gemerkte uitgaven moeten nog verschijnen.